上海交通大學

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

学士学位论文 THESIS OF BACHELOR



论文题目: 多图的离线协同匹配与在线增量匹配

学生学号: 516030910577

专业: 计算机科学与技术(致远荣誉计划)

指导教师: 严骏驰

学院(系): 电子信息与电气工程学院、致远学院



多图的离线协同匹配与在线增量匹配

摘要

寻找两个或多个目标集合的匹配关系是计算机视觉中一个十分基础而重要的问题,其中最经典的应用之一在于将不同图片中的特征点进行匹配,这是包括图像配准、图像识别与理解、多视角重建、几何形状匹配、运动结构理解等很多计算机视觉问题的关键一环. 前作将这一类的问题抽象为图匹配问题,本文基于图匹配领域做了详细而充实的研究探索. 图匹配 (Graph Macthing) 是指在给定相似性模型的情况下,在两个或多个图之间找到节点对应关系. 对于两图匹配,可以将一般形式写为二阶指派问题(Quadratic Assignment Programming,QAP)^[1],也称为 Lawler's 二阶指派问题^[2]. 其数学优化目标如下 $J(\mathbf{X}) = \min_{\mathbf{X} \in \{0,1\}^{n_1 \times n_2}} \operatorname{vec}(\mathbf{X})^\mathsf{T} \mathbf{K} \operatorname{vec}(\mathbf{X})$. 二图匹配已经被证明为 NP-Hard 问题,而在此基础上提出的多图匹配问题形式则更加复杂,求解难度也更加大.

本文同时考虑了离线式多图协同匹配和在线式多图增量匹配问题.本文遵循匹配链优化的思想来解决多图匹配问题:在超级图上找到最优的匹配链.在这里,超图中的顶点表示需要匹配的图,超图上的边表示两个图之间的成对匹配.与先前的作品不同,本文通过仔细的理论研究将匹配链搜索过程转换为在超图上找到最短路径的过程.本文证明了由相似度得分和循环一致性组成的匹配质量函数具有与距离函数相似的性质,并基于此将超图上的离线和在线多图匹配问题分别转换为求解所有成对的最短路径和单源最短路径问题.本文进一步采用Floyd 算法^[3] 和 Shortest Path Fast Algorithm(SPFA)^[4-6] 来设计多个图匹配求解器 MGM-Floyd和 MGM-SPFA.它们可以有效地搜索匹配链合成空间并返回最佳近似解.对于在线问题,本文还提出了 FastSPFA,这是 MGM-SPFA 的加速版本,它通过将超图分成几个子图分别求解来加快匹配速度.

大量的实验结果表明,本文提出的方法优于其他最新的多图匹配方法,包括 CAO^[7]、MISM^[8], IMGM^[9] 以及其他许多离线和在线问题的求解器.本文在仿真数据集(形变测试,外点测试,形变+外点测试,遮罩测试)和真实数据集(Willow-ObjectCalss 和 Sub-Rome16k)上都进行了实验.从综合的角度来看,本文提出的方法在所有数据集的离线和在线实验中都拥有着最佳的性能. Floyd-PC 在精度上比其他近似方法(Floyd-UC,CAO-PC,CAO-UC)好很多;在与 Floyd-C 和 CAO-C 比较时,Floyd-PC 的速度要比这些方法快 2-3 倍,而且精度损失很小. MGM-SPFA 在在线式多图增量匹配问题中精度最高,而 FastSPFA 则比以前的在线多图匹配求解器更快,更准确.此外,本文还探索了这些方法的有效性,affinity boost 技术的表现,抗噪声的鲁棒性以及超参数的敏感性.

关键词: 图匹配, 最短路, 组合优化



UNIFYING OFFLINE AND ONLINE MULTI-GRAPH MATCHING VIA FINDING SHORTEST PATHS

ABSTRACT

Finding the correspondence between two or among many sets of objects is a fundamental problem in computer science, arising in a wide range of contexts. Our primary motivation and running example is the classic problem of matching landmarks (feature points) across many images of the same object in computer vision, which is a key ingredient of image registration, recognition, stereo, shape matching, and structure from motion (SFM). Previous work formulate it as graph matching and I will follow this formulation for further exploration in this papar. Graph matching (GM) refers to finding node correspondences among two or multiple graphs given an affinity model. For two-graph matching, a general form can be written as the following quadratic assignment programming (QAP) problem^[1] which is also called Lawler's QAP^[2]: $J(\mathbf{X}) = \min_{\mathbf{X} \in \{0,1\}^{n_1 \times n_2}} \text{vec}(\mathbf{X})^{\mathsf{T}} \mathbf{K} \text{vec}(\mathbf{X})$. While two-graph matching was proved to be a NP-hard problem, the multi-graph matching based on this is more complex and hard to solve.

This paper addresses the problem of multiple graph matching (MGM) by considering both offline and online settings. We follow the idea of matching composition optimization to solve multiple graph matching problem: finding optimal matching composition on supergraph whose vertices refer to graphs and edges denote the pairwise matching between two graphs. Unlike the previous works, we reformulate the matching composition searching process as finding the shortest path on supergraph with careful theoretical study. We prove the matching quality function, which consists of affinity score and cycle consistency, holds some similar property as the distance function. Based on that, we show that the offline and online MGM on supergraph can be converted to finding all pairwise shortest paths and single-source shortest paths, respectively. We further adapt the Floyd algorithm^[3] and the shortest path faster algorithm (SPFA)^[4-6] to design multiple graph matching solver MGM-Floyd and MGM-SPFA, who can effectively search the matching composition space and return optimal approximation solution. For the online setting, we also proposed FastSPFA, an efficient version of MGM-SPFA via dividing the supergrah into several subgraphs to accelerate the matching speed.

Extensive experimental results show our methods' superiority over other state-of-the-art MGM methods, including CAO^[7],MISM^[8], IMGM^[9] and many other recent methods in offline and online settings. We perform our experiment on both synthetic dataset (in deform, outlier, deform+outlier, mask mode) and real dataset (Willow-ObjectCalss and Sub-Rome16k). Our proposed method achieves the best performance in both offline and online experiments across all datasets from a comprehensive perspective. Floyd-PC outperforms other approximation methods(Floyd-UC, CAO-PC, CAO-UC) a



lot on accuracy while it is $2 \times$ faster than Floyd-C and CAO-C with little accuracy loss. MGM-SPFA, achieve the highest accuracy on online setting while FastSPFA is faster and more accurate than all previous online solver. Moreover, we also explore the effectiveness of our theory, affinity boost performance, robustness against noise, and sensitivity of hyperparameters in our methods.

KEY WORDS: graph matching, shortest path, combinatorial optimization



目 录

主要符	符号对照表							
第一章	绪论	1						
1.1	图匹配介绍	1						
1.2	贡献综述	2						
第二章	相关研究	3						
2.1	多图匹配相关研究综述	3						
2.2	本章小结	4						
第三章	方法设计	5						
3.1	相关符号表述以及定义	5						
3.2	方法设计动机以及相关理论证明	5						
3.3	离线式多图协同匹配求解器: MGM-Floyd	8						
3.4	在线式多图增量匹配求解器: MGM-SPFA	10						
3.5	MGM-Floyd 以及 MGM-SPFA 算法加速相关研究	12						
	3.5.1 通过匹配一致性近似加速	12						
	3.5.2 通过异步更新加速	12						
	3.5.3 通过聚类分组加速	12						
3.6	与其他多图匹配求解器的相关比较与讨论	13						
3.7	本章小结	14						
第四章	实验部分	15						
4.1	评价指标与实验基本设计	15						
4.2	实验数据集	15						
	4.2.1 仿真数据集	15						
	4.2.2 真实数据集	16						
4.3	实验结果与分析	17						
	4.3.1 离线模式多图协同匹配	17						
	4.3.2 在线模式多图增量匹配	20						
	4.3.3 最短路算法有效性分析	23						
	4.3.4 Affinity Boost 方法的有效性	23						
	4.3.5 离线算法鲁棒性分析	24						
	4.3.6 参数敏感度分析	25						
4.4	本章小结	26						



全文总结	27
参考文献	28
致 谢	31



主要符号对照表

- ℝ 实数集
- E 期望
- ツ 图的顶点点集合
- ε 图的边集合
- $G = (V, \mathcal{E})$ 包含点集 V 与边集 \mathcal{E} 的图
- A 邻接矩阵
- $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n_1 n_2 \times n_1 n_2}$,相似度矩阵
- $\mathbf{X} \in \{0,1\}^{n_1 \times n_2}$,代表二图匹配关系的排列矩阵
- $\mathbf{x} = vec(\mathbf{X}) \in \{0,1\}^{n_1 n_2}$,排列矩阵 \mathbf{X} 的向量化形式
- $\mathbb{X} = \{\mathbf{X}_{i,j}\}_{i,j=1}^N$,代表多图匹配中,两两匹配的匹配矩阵集合
- $\mathcal{H} = (\{G_i\}, \mathbb{X})$ 多图匹配中的超图,包含点集(带匹配图集合)与边集(两两匹配集合
- J(X) 匹配 X 取得的相似度分数
- S(X) 匹配 X 的质量评价 (或边权)



第一章 绪论

1.1 图匹配介绍

图匹配(Graph Macthing)是指在给定相似性模型的情况下,在两个或多个图之间找到节点对应关系.与通常只考虑点的一阶相似度的线性匹配^[10] 不同,图匹配引入了图的第二阶相似度信息(边的相似度)^[12] 或更高阶的相似度信息(超边的相似度)^[12] 进行建模,从而能够更好、更鲁棒地处理局部的一些噪声. 例如局部的扰动、模糊或者外点的引入对于一阶匹配的影响可能会非常大,但是对于考虑高阶信息的图匹配来说,能够很好地将这些噪声的影响降到最小. 然而图匹配已经被证明为 NP Hard 问题,无法在多项式时间内求得精确解,现有方法大多将约束条件或者解空间进行松弛,然后寻求近似解^[11, 13-15]. 这里我们给出二图匹配的数学表达形式. 对于两图匹配,可以将一般形式写为以下二阶指派问题(Quadratic Assignment Programming,QAP)^[1],也称为 Lawler's 二阶指派问题^[2],这将是本文的重点. 其他形式,例如考夫曼·贝克曼(Koopmans-Beckmann)的二阶指派问题^[1] 可以视为劳勒(Lawler)的二阶指派问题的特例.

$$J(\mathbf{X}) = \min_{\mathbf{X} \in \{0,1\}^{n_1 \times n_2}} \text{vec}(\mathbf{X})^{\mathsf{T}} \mathbf{K} \text{vec}(\mathbf{X})$$
(1-1)

其中 $\mathbf{X} \in \{0,1\}^{n_1 \times n_2}$ 是一个表示两张图之间点与点之间对应关系的置换矩阵或者局部置换矩阵. $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n_1 n_2 \times n_1 n_2}$ 是一个相似度矩阵,它的对角线部分为两张图之间点与点的相似度信息,非对角线部分为两张图之间边与边的相似度信息.符号 vec(·)表示将一个矩阵转逐列向量化.

尽管有很多关于两图匹配的工作,例如^[11, 16, 17],但现在研究的趋势可以说正在逐渐向多图匹配(Multiple Graph Macthing,MGM)转移. 其中的原因主要包括: i)二图匹配只利用了两张图的匹配信息,而多图匹配可以引入更多的图片作为输入信息,从全局的角度看待二图匹配,可以提升匹配精度,修复一些质量不高的匹配对于整体匹配的影响; ii)实际生活中碰到的大部分问题会涉及多张图片的协同匹配,它们有的处于脱机批处理模式,也就是多图协同匹配问题^[7],有的则是在线增量式多图匹配^[9]形式. 其中增量多图匹配(Incremental Multiple Graph Matching,IMGM)问题由于其实用性而最近受到关注,因为数据的收集经常出现一种顺序的形式,所有的数据可能不是一同到来的,而是先后分批次输入的. 例如,在视觉 SLAM 或测距法中,任务通常会随时间捕获图像然后进行顺序匹配^[18]. 图形学数据集(graphics dataset)的收集也需要类似的情况,这可能需要多年的不断努力. 给定现有的图集合,IMGM 问题尝试通过先前的匹配结果来高效地匹配新出现的图.

本文同时考虑了离线式多图协同匹配问题和在线式多图增量匹配问题.具体而言,离线式多图协同匹配问题是指传统的多图匹配场景,所有的图片会同时输入进行联合匹配,得到两两之间的匹配结果.对于在线式多图增量匹配问题,这意味着图片并不是一次性输入,而是按照一定顺序到达的,需要增量匹配来处理新到达的图与之前图匹配,同时还要用新的匹配关系来优化之前已有图之间的匹配关系.以前的大多数作品都致力于离线式多图协同匹配问题,例如[7,19-26],而对于在线式多图增量匹配问题的研究则比较少[9].在这篇文章中,我们



采取一种超图的视角来看待多图匹配的结果,也就是两两图之间的初始匹配. 其中超图中的每个顶点表示要匹配的图,每一条边表示两张图之间的匹配关系,对于匹配的质量指标可以视为边的权重,形如 $\mathbf{X}_{ik_1}\mathbf{X}_{k_1k_2}\cdots\mathbf{X}_{k_nj}$ 的匹配链可以视为超图中的一条路径. 在这样子的视角中,我们首次展示了离线式多图协同匹配问题可以被转化为最短路径问题,并可以通过动态规划中的即 \mathbf{Floyd} 算法^[3] 来解决. 此外,我们也首次发现在线式多图增量匹配问题可以被转化为单源最短路径问题,可以通过单源最短路径算法(Shortest Path Faster Algorithm,SPFA)^[4-6] 来解决. 与之相对的,同样采用匹配链优化方法的^[7] 忽略了离线式多图协同匹配问题的中的动态规划本质,这导致了它在搜索最优匹配链的时候有许多重复冗余的查找和计算,大幅度减缓了它的算法速度. 同样的情况也发生在,其在线式多图增量版本中,^[9] 以现成的方式重用离线的离线式多图协同匹配问题求解器^[7],引入了部分不必要的搜索内容,造成了效率的下降、时间的冗余.

1.2 贡献综述

这篇文章的主要贡献有一下三点:

- 1) 通过对离线式多图协同匹配问题采取超图的视角,可以将匹配链视为超图上的路径,从而我们可以将离线式多图协同匹配问题转化为最短路径查找问题. 我们通过严谨清晰的数值分析证明了这一转化的可能性,然后设计了基于经典最短路动态规划算法 Floyd 算法的动态匹配链更新算法,称为 MGM-Floyd. 在各类仿真和真实数据集中,它时间与精度上的综合表现都要明显优于[7] 以及其他离线式多图协同匹配问题求解器.
- 2) 对于在线式多图增量匹配问题,我们沿用之前的思路,将它转换为单源最短路径问题. 同样的,我们受到经典最短路算法 Shortest Path Faster Algorithm,SPFA^[4-6] 的启发,设计了一种新的在线式多图增量匹配问题求解器,这种方法被称为 MGM-SPFA. 它可以有效地利用增量匹配来处理新到达的图与之前图匹配,同时还可以利用新的匹配关系来优化之前已有图之间的匹配关系,在多个仿真和真实数据集中都被证明比最新的在线式多图增量匹配问题求解器 IMGM^[9] 更加稳定与准确.
- 3) 基于之前提出的 MGM-SPFA, 我们提出了一种加速版本 FastSPFA, 它通过对图进行聚类并在每个聚类中执行 MGM-SPFA 来处理在线式多图增量匹配问题, 大幅度加速了 MGM-SPFA, 并且比 IMGM 有着更高的准确率.



第二章 相关研究

2.1 多图匹配相关研究综述

读者可以参考[27], 里面有对着多图匹配以及匹配方法等的更全面的综述.

对于多图匹配,研究人员经常将其转换为正则化模型,并且在文献中广泛采用和研究的正则化器是匹配一致性,例如 $^{[7,9,28]}$. 通常,它指的是图 G_i 和 G_j 之间的匹配对应关系应与通过中间图 G_k 导出匹配的相一致:即 $\mathbf{X}_{ij} = \mathbf{X}_{ik}\mathbf{X}_{kj}$. 显然,一致性是必要条件,尤其是考虑到实际中的亲和力通常由于噪声和其他原因而有偏差,一致性将是在多张图之间实现完美匹配的重要提示.

有多种使用循环匹配一致性正则化的方法,这里我们回顾三种代表性的工作路线. 第一组中的方法直接使用每对图的相似度以及匹配一致性(或硬一致性约束)进行优化. 在 $^{[28]}$ 中,通过使用一组基础 $\{\mathbf{X}_{rk}\}_{k=1}^{N}$ 编码两图匹配,用以下循环表示以使其他匹配严格遵守一致性: $\mathbf{X}_{ij} = \mathbf{X}_{ri}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}_{rj}$. 从这个意义上说,参考图 G_r 可以被视为中心基础. 与这种集中式框架相反,在 $^{[7]}$ 中设计了一种更加分布式的方法. 在这项工作中,将所有两图匹配 $\{\mathbf{X}_{ij}\}_{i,j=1,1}^{N,N}$ 视为要计算的解决方案,相似度得分和匹配一致性在目标函数中联合建模以进行优化. 这样,一致性起到了软正则化的作用.

第二类的代表工作有^[29-31],它们尝试将初始的不完善的二图匹配结果作为输入,并尝试通过后处理恢复匹配一致. 谱技术^[20, 21, 32] 通过计算匹配矩阵的特征根,分解并重建匹配矩阵来实现循环匹配一致性. 它的基本原理是图匹配问题可以被转换为整数二次规划问题,然后将其松弛为 Rayleigh 进行求解^{[21], [20]} 是一篇具有开创新的工作,作者提出了一种松弛手段,通过所有初始匹配矩阵最接近的正半定矩阵来实现对全局循环一致性的近似^[22] 对这个想法做出了改进,他们通过估计分解矩阵的秩来平衡对循环一致性的估计与输入输出矩阵之间的差距. 而^[23] 这篇工作更是将匹配问题拓展到了部分匹配上,解决了匹配图之间点数不同的问题. 不过^[22, 23] 它们共同的一个缺点在于:公共图过大的秩 $\bar{n} < n^+$ 导致了比较高的计算复杂度与时间成本. 出于这方面的考虑,^[8] 通过一个新的坐标降维的分解模型来解决这一问题,还有一些通过分布式来降低时间成本的工作。^[26] 通过精密的理论分析,提出了一种基于图聚类的贪心算法. 在^[25] 中,作者设计了分散版的谱技术^[21]. 在最近的工作^[33] 中,采用消息传递算法也被应用与解决多图匹配问题,该问题考虑了一阶与二阶相似度关系以及用于优化的循环一致性.

多于在线增量式的多图匹配问题 (incremental multi-graph matching) 来说,一直没有收到人们的重视,直到最近相关的算法 IMGM^[9] 才被提出,在线增量式的多图匹配问题才开始进入人们的视线. 在线增量式的数据关联还在另外一篇工作^[34] 中得到了充分的考虑,不过该工作只考虑了一阶的点与点之间的相似度,并且提出的方法只被应用在了一个较小的数据集上.

与我们算法最为相关的工作时 $CAO-C^{[7]}$ (包括它的一下衍生方法 CAO-PC 和 CAO-PC 等)以及增量式多图匹配算 fan $IMGM^{[9]}$. 他们都采用基于合成匹配链的策略来生成新的高质量的匹配结果,这也是我们的方法中使用的基本步骤. 然而我们的方法与它们有很大的不同,我



们基于图论提出了更本质的观点,并以此有效地找到合成路径,这在之前的文献中是从未出现过的.我们还为我们的观点提供了仔细的理论分析而建立的,并基于这些发现,开发了相应的离线模式和在线模式下的多图匹配算法.

2.2 本章小结

本章主要介绍了多图匹配相关研究方法与思路,包括被广泛研究的离线模式下多图协同 匹配问题,以及只有少部分工作关注的在线模式下多图增量匹配问题.我们回顾了三种不同 的离线模式多图匹配工作路线,并且简单介绍了他们各自的核心思想,另外我们还回顾了在 线模式多图匹配的相关工作.



第三章 方法设计

3.1 相关符号表述以及定义

为了文章整体叙述的清晰与方便,我们将沿用一些 CAO^[7,9] 中的符号表述习惯与匹配一致性的相关定义,我们将比较重要的以下定义重新列在下方.

定义 1.

 $CAO^{[7]}$ 在给定 N 张图 $\{G_k\}_{k=1}^N$ 以及两两之间的匹配关系 $\mathbb{X} = \{\mathbf{X}_{ij}\}_{i=1,j=i+1}^{N-1,N}$ 的情况下,定义 G_k 的单图匹配一致性为:

$$C_{u}(k, \mathbb{X}) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \|\mathbf{X}_{ij} - \mathbf{X}_{ik} \mathbf{X}_{kj}\|_{F}^{2}/2}{nN(N-1)/2} \in (0, 1].$$
(3-1)

定义 2.

 $CAO^{[7]}$ 在给定 $\{G_k\}_{k=1}^N$ 以及两两之间的匹配关系 \mathbb{X} 的情况下, 对于任意一对图 G_i 和 G_j ,定义它们的二图匹配一致性如下:

$$C_p(\mathbf{X}_{ij}, \mathbb{X}) = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{N} \|\mathbf{X}_{ij} - \mathbf{X}_{ik} \mathbf{X}_{kj}\|_F^2 / 2}{nN} \in (0, 1].$$
 (3-2)

定义 3.

 $CAO^{[7]}$ 在给定 N 张图 $\{G_k\}_{k=1}^N$ 以及两两之间的匹配关系 $\mathbb X$ 的情况下, 定义全局的匹配一致性为:

$$C(\mathbb{X}) = \frac{\sum_{k=1}^{N} C_u(k, \mathbb{X})}{N} \in (0, 1].$$
 (3-3)

3.2 方法设计动机以及相关理论证明

与 CAO^[7] 相类似的,我们通过对离线式多图协同匹配问题采取超图的视角. 在这里特别指出,本文的贡献与超图视角无关,而主要在于我们的基于超图视角,将离线式多图协同匹配问题转换为最短路算法的理论分析,以及由此设计的更高效、更准确的的离线式多图协同匹配问题求解器.

在一张超图中 $\mathcal{H} = \{V = \{G_1, \dots, G_N\}, E = \{\mathbb{X}\}\}$,其中超图上的点代表了匹配图 G,超图上的边代表了两张匹配图之间的匹配关系 \mathbf{X} . 我们采用匹配链的优化策略,旨在通过寻找最优的匹配组合链 $\mathbf{X}_{ik_1}\mathbf{X}_{k_1k_2}\cdots\mathbf{X}_{k_nj}$ 来提升原有的初始匹配 \mathbf{X}_{ij} 的匹配质量. 因为超图 \mathcal{H} 是一张完全图,任何一对 G_i 和 G_j 图之间的匹配链在超图上都可以被视为一条从 G_i 到 G_j 的路径. 基于初始匹配 \mathbb{X} ,寻找两两之间最优匹配组合链 \mathbf{X}_{ij} 的问题等价于在超图 \mathcal{H} 上求解任意两张图 G_i 和 G_j 之间的最优路径.

为了找到最优的路径,我们首先要做的是定义一对匹配的质量.为了更好的与之前的方法作比较,在这里我们沿用了 CAO^[7] 的定义:

$$S(\mathbf{X}_{ij}, \mathbb{X}) = \overbrace{(1-\lambda)J(\mathbf{X}_{ij})}^{\text{affinity score}} + \overbrace{\lambda C_p(\mathbf{X}_{ij}, \mathbb{X})}^{\text{pairwise consistency}}, \qquad (3-4)$$



其中 $S(\mathbf{X}_{ij}, \mathbb{X})$ 由两部分组成:相似度指标与二图匹配一致性(具体定义见公式1–1和2). 为了表述的方便与简洁,我们在下文中提到 $S(\mathbf{X}_{ij}, \mathbb{X})$ 时,将会省略掉 \mathbb{X} ,直接写作 $S(\mathbf{X}_{ij})$. 从某种程度上来说 $S(\mathbf{X}_{ij})$ 可以被视为超图 \mathcal{H} 上的边权,或者点与点之间的距离,我们将在接下来给出详细的理论分析证明这一点.

假设 1.

在给定合适的 λ 以及精度相对较高的初始匹配 \mathbb{X} 的情况下,我们认为我们定义的匹配质量函数 $S(\mathbf{X}_{ii})$ 满足以下条件:

$$S(\mathbf{X}_{ij}) < S(\mathbf{X}'_{ij}) \Longrightarrow S(\mathbf{X}_{ij}\mathbf{X}_{jk}) < S(\mathbf{X}'_{ij}\mathbf{X}_{jk}),$$

换句话说,在优化匹配 \mathbf{X}_{ij} 时,如果 $\mathbf{S}(\mathbf{X}_{ij})$ < $\mathbf{S}(\mathbf{X}'_{ij})$,我们可以放心的将 $\mathbf{S}(\mathbf{X}_{ij})$ 替换成 $\mathbf{S}(\mathbf{X}'_{ij})$,并不需要担心这种替换是否会对求解全局最优解造成障碍.因为在任何一条匹配链中,将 $\mathbf{S}(\mathbf{X}_{ij})$ 替换成 $\mathbf{S}(\mathbf{X}'_{ii})$ 只会提升该匹配链的质量,.

显然,假设1并不完全成立,因此我们给出假设1的期望版本命题1如下. 在命题1成立的情况下,我们认为假设1在大部分的情况符合我们的期望. 另外在命题1中,我们采用了所有可能的置换矩阵集合的随机均匀分布 μ ,而在现实情况中,给定合适的 λ 以及精度相对较高的初始匹配 $\mathbb X$ 的情况下,假设1成立的概率还会进一步增加.

命题 1.

给定 μ 是一个所有可能的置换矩阵集合的随机均匀分布,匹配质量函数 $S(X_{ii})$ 满足以下条件:

$$S(\mathbf{X}_{ij}) < S(\mathbf{X}'_{ij}) \Longrightarrow \mathbb{E}_{X_{ik} \sim \mu}[J(\mathbf{X}_{ij}\mathbf{X}_{jk})] > \mathbb{E}_{X_{ik} \sim \mu}[J(\mathbf{X}'_{ij}\mathbf{X}_{jk})],$$

接下来我们给出命题1的证明. 因为期望的线性性质, 我们可以将命题1分为两个部分, 对相似度分数部分与匹配一致性部分构造相类似的命题2、命题3, 并证明了这两个命题全部成立, 从而证明了命题1也成立. 命题2, 命题3叙述如下:

命题 2.

给定 μ 是一个所有可能的置换矩阵集合的随机均匀分布. 如果有 $J(\mathbf{X}_{ij}) > J(\mathbf{X}'_{ij})$, 那么 $\mathbb{E}_{X_{ik}\sim\mu}[J(\mathbf{X}_{ij}\mathbf{X}_{jk})] > \mathbb{E}_{X_{ik}\sim\mu}[J(\mathbf{X}'_{ij}\mathbf{X}_{jk})]$.

命题 3.

给定 $C_p(\mathbf{X}_{ij}, \mathbb{X}) < C_p(\mathbf{X}'_{ij}, \mathbb{X})$ 的条件,则有 $C_p(\mathbf{X}_{ij}\mathbf{X}_{jk}, \mathbb{X}) < C_p(\mathbf{X}'_{ij}\mathbf{X}_{jk}, \mathbb{X})$.

这里我们给出命题2、命题3的证明. 为了分析的方便,我们首先给出一个基于经典图匹配问题默认的假设:

假设 2.

相似度分数是一个随着匹配精度(匹配结果与真实结果之间的 F 范数距离,具体定义见章节4.1)单调上涨的函数:

$$J(\mathbf{X}_{ij}) < J(\mathbf{X}_{ij}') \Longrightarrow \left\| X_{ij} - \bar{X}_{ij} \right\|_F > \left\| X_{ij}' - \bar{X}_{ij} \right\|_F$$

其中 \bar{X}_{ij} 表示图 G_i 与图 G_j 之间真实的匹配结果, $\|A\|_F = \sqrt{\Sigma A_{ij}^2}$ 表示矩阵 A 的 F 范数.



命题2 证明. 首先,我们来简化一下我们需要证明的命题. 为了叙述的方便与简洁,我们将期望表达式 $\mathbb{E}_{X_{jk}\sim\mu}$ 中的 $\mathbf{X}_{jk}\sim\mu$ 省略. 根据假设2,要证明 $\mathbb{E}[J(\mathbf{X}_{ij}\mathbf{X}_{jk})]>\mathbb{E}[J(\mathbf{X}_{ij}^{\prime}\mathbf{X}_{jk})]$,我们只需要证明

$$\mathbb{E}[\|\mathbf{X}_{ij}\mathbf{X}_{jk} - \bar{\mathbf{X}}_{ik}\|_F] < \mathbb{E}[\|\mathbf{X}'_{ij}\mathbf{X}_{jk} - \bar{\mathbf{X}}_{ik}\|_F]$$

令 $M(\mathbf{X}_{ij})$ 表示 \mathbf{X}_{ij} 中与真实匹配结果一直的点数,我们可以得到 $\|\mathbf{X}_{ij} - \bar{\mathbf{X}}_{ij}\|_F = \sqrt{2(n-M(\mathbf{X}_{ij}))}$. 显然,这样一来我们需要证明的结论就转变成了

$$\mathbb{E}[M(\mathbf{X}_{ij}\mathbf{X}_{jk})] > \mathbb{E}[M(\mathbf{X}_{ij}'\mathbf{X}_{jk})]$$

不失一般性,我们假设每张图中有n个点,真实匹配结果为 $\bar{\mathbf{X}}_{ij} = I$ (如果不为I,我们只需要对匹配结果和真实匹配都乘上某个转置矩阵),令 $p = \frac{M(\mathbf{X}_{ij})}{n}, q = \frac{M(\mathbf{X}_{ij})}{n}, s = \frac{M(\mathbf{X}_{jk})}{n}$. 通过假设2以及条件 $J(\mathbf{X}_{ij}) > J(\mathbf{X}_{ij}')$,我们可以得到:

$$\|\mathbf{X}_{ij} - I\|_F < \|\mathbf{X}'_{ij} - I\|_F$$

这说明 $\sqrt{2(1-p)n} < \sqrt{2(1-q)n}$, 因此我们得到 p > q.

然后我们来计算 $\mathbb{E}[M(\mathbf{X}_{ij}\mathbf{X}_{jk})]$ 的大小. 令 Z_t 为 G_i 中的第 t 个点的匹配情况,如果 G_i 中的第 t 个点匹配上了 G_k 中的第 t 个点,则 $Z_t = 1$,否则 $Z_t = 0$.则我们有:

$$\mathbb{E}[M(\mathbf{X}_{ij}\mathbf{X}_{jk})] = \sum_{t} \mathbb{E}[Z_{t}]$$

$$= \sum_{t} \left(Pr[\mathbf{X}_{ij}(t,t) = 1 \cap \mathbf{X}_{jk}(t,t) = 1] + \sum_{t' \neq t} Pr[\mathbf{X}_{ij}(t,t') = 1 \cap \mathbf{X}_{jk}(t',t) = 1] \right)$$

$$= n \left(ps + \frac{(1-p)(1-s)}{n-1} \right)$$

$$= \frac{n}{n-1} \left(psn - p - s + 1 \right).$$

同理可得, $\mathbb{E}[M(\mathbf{X}'_{ii}\mathbf{X}_{jk})] = \frac{n}{n-1}(qsn-q-s+1)$. 因此,我们有:

$$\mathbb{E}[M(\mathbf{X}_{ij}\mathbf{X}_{jk})] - \mathbb{E}[M(\mathbf{X}'_{ij}\mathbf{X}_{jk})] = \frac{sn-1}{n-1}(p-q)n.$$

在实际应用中,即便是在有外点或者有局部噪声的应下下,二图匹配求解器得到的初始匹配 的精度也可以非常轻松的达到 40%,所以

$$s \geq \frac{1}{n} \Longrightarrow \frac{sn-1}{n-1} > 0 \Longrightarrow \frac{sn-1}{n-1}(p-q)n > 0 \Longrightarrow \mathbb{E}[J(\mathbf{X}_{ij}\mathbf{X}_{jk})] > \mathbb{E}[J(\mathbf{X}_{ij}'\mathbf{X}_{jk})]$$

从上述关于命题2的证明中,我们还可以发现,匹配接上任意后缀后,匹配精度依旧保序的概率和以下两个因素有关:

- 1. \mathbf{X}_{ij} 和 \mathbf{X}'_{ii} 的匹配精度的差异,匹配精度提升越大,接上后缀后依旧保序的概率越大.
- 2. 后缀匹配 X_{jk} 的匹配精度,后缀匹配的精度越高,接上后缀后依旧保序的概率越大. 这表明在采用最短路算法优化某个多图匹配结果时,更高的初始匹配准确性有助于提高匹配方法的性能. 相反,如果整体匹配精度很差,则优化匹配的空间可能相对较小. 这也是我们为什么在假设1中要加入"精度相对较高的初始匹配"这一条件的原因.



算法 3-1 离线式多图协同匹配算法: MGM-Floyd

输人: 相似度矩阵 $\{\mathbf{K}_{ij}\}_{i,i=1}^N$ 、初始匹配矩阵 $\mathbb{X}^{(0)}$ 、匹配一致性权重 λ

首先将匹配一致性权重设为0,采用 Affinity Boost 技术预处理一遍初始匹配矩阵 $\mathbb{X}^{(0)}$

for 遍历每一轮更新的中间节点 G_v do

for 遍历任意一对图 G_x 、 G_y do

通过公式. 3–4计算 $S_{org}=S(\mathbf{X}_{xy})$ (或者通过公式. 3–5、 3–6求解 $S_{pc}^{\mathbb{X}}$ 、 $S_{uc}^{\mathbb{X}}$)

通过公式. 3–4计算 $S_{org}=S(\mathbf{X}_{xv}\mathbf{X}_{vy})$ (或者通过公式. 3–5、 3–6求解 $S_{pc}^{\mathbb{X}}$ 、 $S_{uc}^{\mathbb{X}}$

if $S_{org} < S_{opt}$ then

$$\mathbf{X}_{xy} \leftarrow \mathbf{X}_{xy} \mathbf{X}_{yy}$$

end if

end for

end for

再将匹配一致性权重设为 \(\lambda \), 重新跑一遍第2行-第10行

输出: 优化后匹配结果 ※

命题3 证明. 通过 $C_p(\mathbf{X}_{ij}, \mathbb{X})$ 定义,我们可以得到:

$$\sum_{t=1}^{N} \|\mathbf{X}_{ij} - \mathbf{X}_{it}\mathbf{X}_{tj}\|_{F} > \sum_{t=1}^{N} \|\mathbf{X}'_{ij} - \mathbf{X}_{it}\mathbf{X}_{tj}\|_{F}.$$

因为 X_{ik} 是一个置换矩阵,乘上置换矩阵并不会改变F范式的值,所以有,

$$\sum_{t=1}^{N} \left\| (\mathbf{X}_{ij} - \mathbf{X}_{it} \mathbf{X}_{tj}) \mathbf{X}_{jk} \right\|_{F} > \sum_{t=1}^{N} \left\| (\mathbf{X}'_{ij} - \mathbf{X}_{it} \mathbf{X}_{tj}) \mathbf{X}_{jk} \right\|_{F}$$

$$C_{p}(\mathbf{X}_{ij} \mathbf{X}_{jk}, \mathbb{X}) < C_{p}(\mathbf{X}'_{ij} \mathbf{X}_{jk}, \mathbb{X}).$$

我们已经证明了命题2与命题3,根据期望的线性性质,命题1也成立,所以假设1在大部分的情况符合我们的期望. 我们方法的核心在于: 基于这个假设1,我们可以近似的将- $S(\mathbf{X}_{ij})$ 当做最短路中 G_i 和 G_j 之间的距离函数,并且将多图匹配问题转化为最短路问题进行求解. 我们将会在接下来的章节3.3 和章节3.4 中引入经典最短路算法 Floyd 以及单源最短路算法 SPFA来分别解决离线式多图协同匹配问题和在线式多图增量匹配问题.

3.3 离线式多图协同匹配求解器: MGM-Floyd

在超图的视角下,离线式多图协同匹配的目的是寻找在超图上任意两个顶点(匹配图)之间的最优匹配路径. CAO $^{[7]}$ 是通过搜索来寻找最优匹配路径,对于任意一对匹配采取迭代优化,每次遍历不同中间节点来找出局部最优解进行更新. 但是,通过此方法找到的路径长度不会超过 2^T ,其中 T 是迭代次数,而且每次迭代过程中会有很多冗余的计算. 为了克服这一限制,我们提出了一种利用动态规划处理离线式多图协同匹配的算法,即基于经典最短路



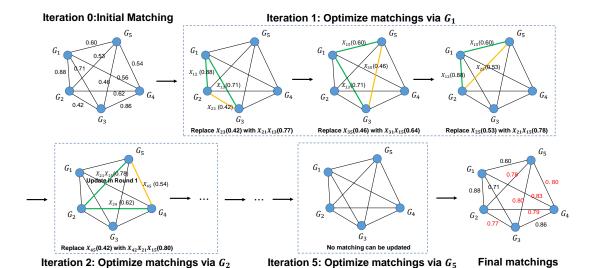


图 3-1 对 MGM-Floyd 的样例说明. 图中绿的边表示用于更新的边, 黄的边表示被更新的边; 括号中的数字 表示每条边的匹配得分;匹配链中的 X_{ij} 表示初始匹配;在第i轮中,我们用 G_i 作为中间节点更新所有的匹

Figure 3-1 Illustration of MGM-Floyd for offline MGM. The green and yellow line denotes the matchings used to update and need to be updated, respectively. The number in the brackets on each edge denotes the matching score and the composition matching is near the number with X_{ij} being the initial matching. In iteration i, use G_i as internal vertex to update the matchings.

算法 Floyd 的 Multiple Graph Matching with Floyd 算法, 简称 MGM-Floyd. 与 CAO[7] 相比, MGM-Floyd 能够以更少的比较、更新来更有效地找到最优匹配路,在时间的精度上有着很好 的综合表现.

令 $\mathbf{X}_{ii}^{(k)}$ 表示 G_i 和 G_j 之间只用 $\{G_1,G_2\dots G_k\}$ 作为中间节点得到的最优匹配路径,也就 是最优匹配路径只经过 $\{G_1,G_2\dots G_k\}$ 这些顶点. 初始化 $\mathbf{X}_{ij}^{(0)}$ 是二图匹配求解器 $^{[11]}$ 直接得到 的两两匹配.显然,在给定上一轮的匹配优化结果 $\mathbb{X}^{(k-1)}$ 时, $\mathbf{X}_{ij}^{(k)}$ 的更新只有如下所示的两种 情况:

- 1. $\mathbf{X}_{ij}^{(k)} = \mathbf{X}_{ij}^{(k-1)}$,表示 G_i 和 G_j 之间的最优路径不需要通过第 k 张图 G_k . 2. $\mathbf{X}_{ij}^{(k)} = \mathbf{X}_{ik}^{(k-1)} \mathbf{X}_{kj}^{(k-1)}$,表示 G_i 和 G_j 之间的最优路径需要通过第 k 张图 G_k .

因此,我们只需要比较两种情况的匹配质量或者说路径长度($S(\cdot)$ 函数值),就可以得到 $\mathbf{X}_{ii}^{(k)}$ 的动态转移方程如下:

$$\mathbf{X}_{ij}^{(k)} = \underset{\mathbf{X} \in \Theta}{\arg\max} (1 - \lambda) J(\mathbf{X}) + \lambda C_p(\mathbf{X}, \mathbb{X}),$$

其中 $\Theta = \{\mathbf{X}_{ik}^{(k-1)}\mathbf{X}_{kj}^{(k-1)}, \mathbf{X}_{ij}^{(k-1)}\}$. 另外,由于 $\mathbb{X}^{(k)}$ 的更新只依赖于 $\mathbb{X}^{(k-1)}$,所以这个动态转移方 程可以被简化成如下形式,从而节省部分空间损耗:

$$\mathbf{X}_{ij} = \underset{\mathbf{X} \in \{\mathbf{X}_{ik} \mathbf{X}_{kj}, \mathbf{X}_{ij}\}}{\arg \max} (1 - \lambda) J(\mathbf{X}) + \lambda C_p(\mathbf{X}, \mathbb{X}).$$

具体的算法细节可以参考 Alg. 3-1, 图片3-1给出了 MGM-Floyd 的运行过程的一个实例.



算法 3-2 在线式多图增量匹配算法: MGM-SPFA

```
输人: 相似度矩阵 \{\mathbf{K}_{ij}\}_{i,i=1}^N、初始匹配矩阵 \mathbb{X}、匹配一致性权重 \lambda
  for 对于新到来的图 G_N do
       通过二图匹配秋季期获得其他图与 G_N 之间的匹配 \mathbb{X}_{N}^{(0)}
       初始化 Q = \{G_1, G_2 \cdots, G_{N-1}\};
       repeat
           从 Q 取出并去掉 G_x,将 G_x 作为中间节点优化其他匹配
           for 遍历所有图 G_v do
                通过公式. 3-4计算 S_{org} = S(\mathbf{X}_{yN})(或者通过公式. 3-5、 3-6求解 S_{pc}^{\mathbb{X}}、S_{uc}^{\mathbb{X}})
                通过公式. 3-4计算 S_{org} = S(\mathbf{X}_{yx}\mathbf{X}_{xN})(或者通过公式. 3-5、 3-6求解 S_{pc}^{\mathbb{X}}、S_{uc}^{\mathbb{X}})
                if S_{org} < S_{opt} then
                    \mathbf{X}_{vN} \leftarrow \mathbf{X}_{vx} \mathbf{X}_{xN}
                end if
           end for
       until Q 为空集
       for 任意一对超图 \mathcal{H}\setminus\{G_N\} 中的 G_x\setminus G_y do
           通过公式. 3-4计算 S_{org} = S(\mathbf{X}_{xy})(或者通过公式. 3-5、 3-6求解 S_{pc}^{\mathbb{X}}、S_{uc}^{\mathbb{X}})
           通过公式. 3-4计算 S_{org} = S(\mathbf{X}_{xN}\mathbf{X}_{Ny})(或者通过公式. 3-5、 3-6求解 S_{nc}^{\mathbb{X}}、S_{uc}^{\mathbb{X}})
           if S_{org} < S_{opt} then
                \mathbf{X}_{xy} \leftarrow \mathbf{X}_{xN} \mathbf{X}_{Ny}
           end if
       end for
  end for
输出: 优化后匹配结果 ※
```

根据假设1 的推理和命题2 的证明,我们的方法在基础匹配精度较高的时候会更加的有效. 因此,在运行 MGM-Floyd 方法之前,我们利用 Affinity Boost 技术来提高初始匹配精度. 具体来说,我们会运行两遍 MGM-Floyd. 在第一阶段(Affinity Boost 阶段)中,我们将 λ 设

置为 0,仅通过考虑相似度分数来获得更好的初始匹配.由于忽略一致性项,准确性不高,但是时间成本相较于第二阶段来说十分低廉.然后,我们使用适当的 λ 再次进行此过程,同时

考虑匹配相似度分数和匹配一致性,来获得最终的匹配匹配结果 (MGM-Floyd 阶段).

3.4 在线式多图增量匹配求解器: MGM-SPFA

在线式多图增量匹配问题的目的是将新来的图 G_N 匹配到已匹配的 N-1 张图中区. 在超图 \mathcal{H} 上,这等价于找到从新来的顶点 G_N 到所有其他顶点的最佳匹配路径,这与经典最短路中的单源最短路问题十分相似. 因此,我们提出了一种基于单源最短路径算法 SPFA 的在线方法 Multiple Graph Matching with SPFA,简称为 MGM-SPFA.



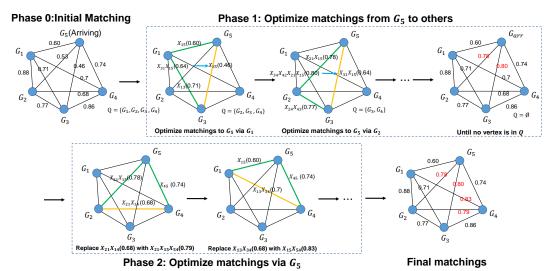


图 3-2 对 MGM-SPFA 的样例说明. 这个样例中, G_5 是新到来的图;绿的边表示用于更新的边,黄的边表示被更新的边;匹配链中的 X_{ij} 表示初始匹配;在 Phase 1 中,我们固定 $\mathcal{H}\setminus\{G_5\}$ 中所有的匹配,并且更新每个图到 G_5 的匹配 \mathbf{X}_{iN} ;在 Phase 1 中,我们用 G_N 作为中间节点更新所有的匹配.

Figure 3–2 Illustration of MGM-SPFA for online MGM. Here G_5 is the arriving graph. The green and yellow line denotes the matchings used to update and need to be updated, respectively. The number in the brackets on each edge denotes the matching score and the composition matching is near the number with X_{ij} being the initial matching. In Phase 1, fix all the matchings in $\mathcal{H}\setminus\{G_5\}$ and update each pair of \mathbf{X}_{iN} using other vertices. In Phase 2, fix all X_{iN} and use G_N as internal vertex to update all the matchings \mathbf{X}_{ij} in $\mathcal{H}\setminus\{G_5\}$.

MGM-SPFA 的核心思想在于:如果 G_N 到 G_i 的路径被更新了,那么 G_i 可能可以作为新的中间节点去更新其他的匹配路径.因此,我们维护一个存放了所有被更新过的节点的队列. 然后我们遍历队列中的所有节点,用他们作为中间节点来更新他们邻居的匹配路径. 每当有新的路径被更新了,我们就将改节点加入队列. 如此重复,直到队列为空,没有点可以再被更新为止. 更具体的来讲,MGM-SPFA 主要包括 3 个部分:

- 1. 在超图 \mathcal{H} 上添加新来的点(匹配图)与已有顶点之间的连边. 利用二图匹配求解器,例如 RRWM^[11] 获得新来的图 G_N 与其他图 $\{G_1 \cdots G_{N-1}\}$ 之间的匹配 \mathbb{X}_{Ni} . 然后因为更新了连边,所以把 $\{G_1 \cdots G_{N-1}\}$ 加入维护的队列 Q 中.
- 2. 从队列 Q 中取出第一个节点 G_i 并将它从队列中删除. 以这个 G_i 为中间节点,更新所有 G_i 的邻居 $N(G_i)$ 来获得更好的匹配路径. 如果有更新,则将更新节点入队. 重复这个过程直到队列为空或者更新次数达到设定上限.
- 3. 用新来的图 G_N 作为中间节点,优化所有已有的匹配. 更具体的来说,用 $\mathbf{X}_{uN}\mathbf{X}_{Nv}$ 来 优化 $\mathcal{H}\setminus\{G_N\}$ 中的每一对 G_u 和 G_v 的匹配 \mathbf{X}_{uv} .

具体的算法细节可以参考 Alg. 3-2, 图片3-2给出了 MGM-Floyd 的运行过程的一个实例.



算法 3-3 在线式多图增量匹配算法: FastSPFA

输人: 相似度矩阵 $\{\mathbf{K}_{ij}\}_{i,i=1}^N$ 、初始匹配矩阵 \mathbb{X} 、匹配一致性权重 λ

for 对于新来的图 G_N do

计算聚类数量 $M = \max(1, N/C_{min})$

将 $\mathcal{H}\setminus\{G_N\}$ 随机分成 M 组.

for each cluster C_i do

通过 $C_i \cup \{G_N\}$ 中的土,构造超图 \mathcal{H} 的子图 \mathcal{H}_i

调用算法3-2中的第1行到第20行获得图 \mathcal{H}_i 中的点到 G_N 的匹配: $\{X_{Nh}\}_{h=1}^{N-1}$

end for 执行和算法 Alg. 3–2第14行到第20 行同样的后处理,优化 $\mathcal{H}\setminus\{G_N\}$ 上的所有匹配: 用 $\mathbf{X}_{uN}\mathbf{X}_{Nv}$ 去更新每一对匹配 \mathbf{X}_{uv}

end for

输出: 优化后匹配结果 ※

3.5 MGM-Floyd 以及 MGM-SPFA 算法加速相关研究

3.5.1 通讨匹配一致性近似加速

为了更好地与前作的方法进行比较,我们沿用了之前的工作 $CAO^{[7]}$ 中采用的近似匹配一致性的方法,在这里做个简单的叙述。离线模式下多图协同匹配算法中最消耗时间的部分就是计算匹配一致性的部分,占用的时间成本几乎达到整个算法的 90% 以上,因此如何简化匹配一致性的计算是加速离线模式下多图协同匹配算法的重中之重。根据章节3.1的定义,我们对距离函数 $S(\cdot)$ 作了两种近似计算 $S_{nc}^{\mathbb{X}}(\mathbf{X}_{ij}\mathbf{X}_{jk})$ 以及 $S_{uc}^{\mathbb{X}}(\mathbf{X}_{ij}\mathbf{X}_{jk})$,具体形式如下:

$$S_{pc}^{\mathbb{X}}(\mathbf{X}_{ij}\mathbf{X}_{jk}) = (1 - \lambda)J(\mathbf{X}_{ij}\mathbf{X}_{jk}) + \lambda \sqrt{C_p(\mathbf{X}_{ij}, \mathbb{X})C_p(\mathbf{X}_{jk}, \mathbb{X})},$$
(3-5)

$$S_{uc}^{\mathbb{X}}(\mathbf{X}_{ij}\mathbf{X}_{jk}) = (1 - \lambda)J(\mathbf{X}_{ij}\mathbf{X}_{jk}) + \lambda C_{u}(j, \mathbb{X}). \tag{3-6}$$

3.5.2 通过异步更新加速

在上面所述的这两种近似 $S_{pc}^{\mathbb{X}}(\mathbf{X}_{ij}\mathbf{X}_{jk})$ 和 $S_{uc}^{\mathbb{X}}(\mathbf{X}_{ij}\mathbf{X}_{jk})$ 的前提下,我们可以进一步通过异步 更新的方法来提高 $S_{pc}^{\mathbb{X}}$ 和 $S_{uc}^{\mathbb{X}}$ 的计算效率,节省时间成本. 具体来说,超图 \mathcal{H} 上共有 $\binom{N}{2}$ 条 边,当其中只有非常少数的边被更新的时候,我们可以忽略 C_p 和 C_u 的细微变化. 因此,我们可以每隔一段时间整体计算两两匹配一致性,而不需要实时更新. 这种异步更新可以给带来很大程度的加速,在离线模式下的多图匹配算法中尤为明显.

3.5.3 通过聚类分组加速

当图片的数量增多是,MGM-SPFA的时间成本增加极快,几乎与图片数量成平方乃至立方关系增加。我们采取了一个比较自然的想法,对已有的图片通过聚类分组,控制每个组的图片数量,从而来加速 MGM-SPFA 算法.

之前的工作^[9] 已经展示了通过聚类分组对于加速图匹配问题的优越性,我们基于此提出 MGM-SPFA 的加速版本 FastSPFA. 和 MGM-SPFA 相比, FastSPFA 虽然匹配精度略低, 但是



能大幅度增加匹配的速度,并且令时间增长与图片数量增长基本呈线性关系. FastSPFA 的主要步骤如下所示:

- 1. 和 MGM-SPFA 相同,我们首先在超图 \mathcal{H} 上添加新来的点 (匹配图) 与已有顶点之间的 连边. 利用二图匹配求解器,例如 RRWM^[11] 获得新来的图 G_N 与其他图 $\{G_1 \cdots G_{N-1}\}$ 之间的匹配 \mathbb{X}_{Ni} .
- 2. 选择每个组最少能拥有的图片数量 C_{min} ,并且将所有图片随机平均分成 M 组,确保每一组至少有 C_{min} 张图片($|Cluster_i| \ge C_{min}$). 具体来说,令 $M = max(1, \lfloor \frac{N}{C_{min}} \rfloor)$,其中 |x| 表示对 x 取整.
- 3. 对每个组单独运行 MGM-SPFA 来获得 G_N 到其他所有图的最优匹配链.
- 4. 同样采用与章节3.4提到的后处理: 用 $\mathbf{X}_{uN}\mathbf{X}_{Nv}$ 来优化 $\mathcal{H}\setminus\{G_N\}$ 中的每一对 G_u 和 G_v 的匹配 \mathbf{X}_{uv} .

3.6 与其他多图匹配求解器的相关比较与讨论

最后,我们将在这个章节讨论一下我们的方法与其他多图匹配方法的相同以及不同之处. 因为在线式增量多图匹配工作并不多,所以在这里我们主要讨论离线模式下多图协同匹配问题的求解方法,包括离散空间求解方法与基于连续空间松弛的方法.

首先,我们将我们的方法视为离散多图协同匹配方法. 此类别还包括基于组合搜索的方法 CAO^[7] 和基于树结构优化的方法 MatchOpt^[28],它们都采用超图的视角,在利用现有二图匹配求解器获得基础图匹配情况下,通过迭代优化两两图之间的匹配求解离线模式下多图协同匹配问题. 匹配一致性的限制条件在这类方法中要么通过特殊的结构(例如树状结构、星型结构)得到自然满足,要么通过在局部优化过程中引入匹配一致性进行综合考虑(例如定义距离函数 S 时引入匹配一致性).^[8, 20, 22] 等作品则试图分两个阶段解决离线模式下多图协同匹配问题题. 在第一阶段,它们同样采用了二图匹配求解器来获得初始的两两匹配,然而这种匹配的质量往往比较低. 然后在第二阶段中,它们会通过某些连续的优化方法来满足全局匹配一致性的限制条件,比如谱聚类^[21],半正定规划^[20] 或是 Alternating Direction Methods of Multipliers(ADMM)等一些更加鲁邦的改进方法^[22]. 还有其他一些工作例如 MatchALS^[23] 通过在连续空间中松弛来探索关于匹配一致性和相似度的联合优化. 与我们的研究息息相关的第三条线程是基于排序、聚类等的方法,它们采用例如矩阵分解^[35],k-means 聚类方法^[36] 等手段求解图匹配问题. 然而需要特别注意的是,这些方法仅使用节点的一届特征,而不使用边的二阶信息.

与离散求解方法相比,连续空间求解离线模式多图协同匹配问题的方法存在如下几点局限性:

- 1. 对原始匹配问题进行松弛以求得近似解,这会导致不必要的,甚至是无边界的模型偏差. 正如^[37] 针对二图优化匹配问题已经提出了相关的观点,而对于更加复杂的多图匹配问题来说,这一点较之二图匹配更加的突出和明显.
- 2. 即便是松弛后的多图匹配问题, 很多依旧会碰到诸多的困难, 例如: 非凸优化性质, 存在离散或者硬性的约束条件, 高维度优化等. 这会导致多图匹配处理规模大小的问题 (例如 MatchLift^[22]) 或对边的二阶信息运用的局限性 (例如 MatchALSS^[23]);



3. 由于松弛后的问题通常无法确保收敛到匹配解,因此仍然需要后处理步骤才能将连续解四舍五人为置换矩阵或者部分置换矩阵.

与之相对的,离散求解方法的优势在于,首先它不会受到取整带来的误差影响.其次,我们提出的方法是基于动态规划的算法来高效地在离散空间中搜索可行解,匹配一致性约束是搜索过程中自然满足的,不像其他的方法中,满足一致性约束是一种极大地负担.此外,我们的方法并不局限于离散空间优化,在二图匹配阶段我们可以重用任意的二图匹配器,无论是离散求解器还是连续求解器.在接下来的实验部分,我们将展示我们的方法相较于其他离散、连续优化方法的优越性.

3.7 本章小结

本章主要讲述了多图匹配问题与最短路问题相结合的可能性,并给予详细的证明,将最短路算法 Floyd、单源最短路算法 SPFA 与多图匹配相结合,提出了我们自己的创新算法: MGM-Floyd 和 MGM-SPFA. 此外,我们还考虑了对于离线、在线方法的各种加速改进,并开发了在线算法的加速版本 FastSPFA. 在本章的最后,我们还就我们提出的方法与现有的其他方法做了比较,提出了我们方法的优势所在.



第四章 实验部分

4.1 评价指标与实验基本设计

所有的实验结果都是在 3.40GHZ 的 4 核 CPU, 16G 内存的台式机环境下运行的. 我们采用了图匹配实验中三种被经常用到的评价指标^[7,9]: 匹配精度、相似度分数与匹配一致性, 在这里我们将这三个指标分别简写成 acc, scr 和 con. 其中

$$\mathrm{acc} = 1 - \sum_{i,j} \|\mathbf{X}_{ij}^* - \mathbf{X}_{ij}^{\mathrm{GT}}\|_F^2 / nN^2 \in [0,1]$$

表示匹配结果 \mathbf{X}_{ii}^* 与真实匹配 \mathbf{X}_{ii}^{GT} 之间的差距. 全局的相似度分数定义如下:

$$scr = \frac{1}{N^2} \sum_{i,i} \frac{\text{vec}(\mathbf{X}_{ij}^*)^\top \mathbf{K}_{ij} \text{vec}(\mathbf{X}_{ij}^*)}{\text{vec}(\mathbf{X}_{ij}^{GT})^\top \mathbf{K}_{ij} \text{vec}(\mathbf{X}_{ij}^{GT})}$$

注意这里的 src 有可能会大于 1, 因为相似度矩阵 affinity matrix 的生成无法完全保证与匹配精度单调上涨,可能会出现错误的匹配却得到比真实匹配更高的相似度分数的情况. 全局匹配一致性则遵从定义3中的定义.

对于所有的实验,包括仿真数据集和真实数据集,我们都重复运行了 20 次并报告了算法表现的平均值. 值得一提的是,在时间方面的结果呈现时,离线模式下的结果图的横轴表示不同图片数量输入时的算法的时间成本,在线模式下的结果图横轴表示图片按照顺序依次到来时每一轮的算法时间消耗. 关于参数部分,除非特殊声明,我们一般在 MGM-Floyd 中设置 $\lambda = 0.3$,在 MGM-SPFA 与 FastSPFA 中设置 $\lambda = 0.4$,各个实验具体的参数值可以见表格4-1.

我们对于绝大部分的实验采用 RRWM^[11] 作为基础的二图匹配求解器,以此来获得两两初始匹配 X. 二图匹配求解器一般来说有两种选择:使用二阶信息求解的二图匹配器,比如我们使用的 Reweighted Random Walk Matching,RRWM^[11];或者使用高阶边信息求解的二图匹配器,比如 RRWM 的超边版本,Reweighted Random Walks Hyper-graph Matching,RRWHM^[38].如图 4–1所示,我们首先对于 RRWM 与 RRWHM 两种二图匹配器做了比较,由于多图匹配算法中关于二图匹配求解器是一个黑盒,因此我们比较了不同的二图匹配求解器对于多图匹配算法精度的影响。结果不出所料,运用高阶边的信息的 RRWHM 多图匹配算法的精度比用RRWM 要高,但是在时间上损耗更多。因此,为了后面结果的可比较性,我们对于绝大部分的实验采用 RRWM^[11] 作为基础的二图匹配求解器,以此来获得两两初始匹配 X.

4.2 实验数据集

4.2.1 仿真数据集

在仿真数据集的处理上,我们首先随机生成一张完全图的边的特征作为参考.对于每一张仿真图,它的边的特征都是通过在参考图的对应边特征上加一个高斯扰动得到的.比如说,



ObjectClass	$n_i = 10, n_o = 0, \epsilon = 0, \rho = 0, \sigma^2 = 0.03, \beta = 0.9$
deform	$n_i = 10, n_o = 0, \epsilon = 0.15, \rho = 0, \sigma^2 = 0.05$
outlier	$n_i = 6, n_o = 4, \epsilon = 0, \rho = 0, \sigma^2 = 0.05$
deform+outlier	$n_i = 6, n_o = 4, \epsilon = 0.04, \rho = 0, \sigma^2 = 0.05$
mask	$n_i = 10, n_o = 0, \epsilon = 0.05, \rho = 0.9, \sigma^2 = 0.05$
ObjectClass	$n_i = 10, n_o = 2, \epsilon = 0, \rho = 0, \sigma^2 = 0.05, \beta = 0.9$
deform robustness	$n_i = 8, n_o = 2, \epsilon = 0.04 : 0.12, \rho = 0, \sigma^2 = 0.05$
outlier robustness	$n_i = 10, n_o = 6: 12, \epsilon = 0.04, \rho = 0, \sigma^2 = 0.05$

表 4-1 表格4-2(上方), 图4-2, 4-3, 4-5, 4-6, 4-7, 4-8, 4-10(中间) 以及图4-9(下方) 的参数设置.

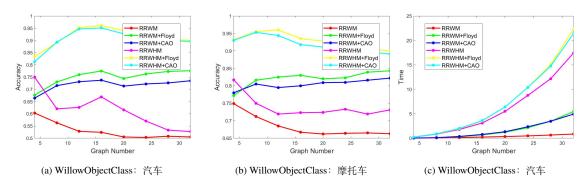


图 4-1 从精度和时间(秒)上比较讲 RRWM^[11] 和 RRWHM^[38] 分别作为多图匹配算法中的二图匹配器的不同 Figure 4-1 Accuracy and time (seconds) comparison of RRWM^[11] and RRWHM^[38] as the two-graph matching solver

仿真图的边特征 q_{ij}^{p} 通过如下计算得到: $q_{ij}^{p} = q_{ij}^{r} + N(0,\epsilon)$, 其中 ϵ 是一个关于参考图形变程度的超参. 除此之外,我们还会对初始匹配 \mathbb{X} 做随机遮罩: $\rho \in [0,1]$ 表示所有的两两匹配中,有多少对不是通过二图匹配求解器,而是通过随机一个置换矩阵得到的. 当 ρ 变大的时候,意味着初始匹配的精度会降低. 我们将通过这种方式来控制初值匹配精度,并探究假设1是否成立,具体实验部分. 边的相似度分式计算公式为:

$$\mathbf{K}_{ac;bd} = \exp(-\frac{(q_{ab} - q_{cd})^2}{\sigma^2})$$

其中 σ^2 是相似度敏感参数. 对于外点测试来说,我们采用和前作一样的处理手段,在原来的内点基础上加入 n_o 个随机坐标的外点. 这样子的仿真数据集处理方式同样被应用在这些工作中[7,9,19]. 1

4.2.2 真实数据集

我们一共使用了两个真实图片数据集.

 $^{^1}$ 即使在现实问题中,外点个数往往不完全相同,我们也可以通过增加僵尸点"dummy nodes"的办法使得每张图的点数都一致 $^{[39]}$



Willow-ObjectClass^[40] 中囊括了来自 Caltech-256 和 PASCAL VOC2007 的部分图片,这些图像分为五类,分别是为: 109 张脸的图片,66 张酒瓶的图片,50 张鸭子的图片,40 张汽车的图片和40 张摩托车的图片。我们在部分实验中选择移除脸和酒瓶这两个类,因为它们对于某些多图匹配问题求解器来说太容易了,很难看出区别。每张图片手动标记10个节点,我们还将随机生成 no 个外点来进行多图匹配外点测试。

我们还是用了另一个数据集 Rome16K,Rome16K 是一个三维重建的数据集而不是一个图匹配的数据集,因此我们从图片数据集 Rome16K^[41] 中选择了一部分适合图匹配问题的图片作为我们的数据集,我们把它叫做 Sub-Rome16K. 我们一共整理了三个不同类别的图片: 罗马竞技场,西斯廷礼拜堂天顶画与罗马万神殿. 对于每个类别,我们一共整理了 32 张图片,图片之间一共有 30 个公共点. 对每一张图片,我们会先去前 n_i 个关键点作为内点,然后在后面 $30-n_i$ 个关键点中选取 n_o 作为外点. 特别需要提及的是,我们挑选这三个类是为了测试不同难度的真实场景下,不同图匹配算法的表现结果. 我们用匹配结果的绝对精度来表示类别的难易程度,在采用同一方法时,越低的匹配精度表示该类别越难以匹配. 在实验中,我们发现西斯廷礼拜堂天顶画是最难的类别,万神殿次之,而罗马竞技场则是最简单的类别.

在大多数实验中,我们只用点的坐标信息来生成一阶与二阶相似度矩阵,而没有基于图片提取节点特征. 每张图片的建图采用三角剖分,此外在生成相似度矩阵时,我们还会同时考虑边长与角度之间的关系: $K_{ia,jb} = \beta K_{ia,jb}^{len} + (1-\beta)K_{ia,jb}^{ang}$. 在实验4—1中,我们还尝试了利用边的高阶信息. 当和其他的连续优化多图匹配算法比较时,比如 $^{[8,21-23]}$ (见表4—2),我们沿用了 $^{[8]}$ 中的所有做法,更具体的来说,我们首先采用了提前在 ImageNet 上训练好的 AlexNet $^{[42]}$ 提取点的特征. 然后用线性指派求解器 Hungarian 算法得到初始的两两匹配,再输入给多图匹配算法.

4.3 实验结果与分析

4.3.1 离线模式多图协同匹配

图4-2和4-3离线模式多图协同匹配求解器 CAO 和 Floyd 在仿真数据集和真实数据集上的性能表现。我们通过匹配精度 acc,相似度分数 src,匹配一致性 con 与算法时间消耗 time 等指标对 Floyd 与 CAO 进行了对比,其中还包括两者 PC,UC,C 的模式下,分别用不同距离函数 S_{pc} , S_{uc} ,S 近似一致性的表现。在 PC 与 UC 近似模式下,基于 Floyd 的多图协同匹配算法相较于 CAO,在精度上有十分明显的提升。在 C 模式下,Flyod 的时间复杂度要远低于 CAO,并且两者精度几乎相同。总而言之,基于 Floyd 的多图协同匹配算法在匹配一致性方面具有比 CAO 显着改善,而相似度分数虽然略低,但并不明显。例如图4-2d和4-2e中所示,在的仿真数据集的 deform 模式上,Floyd-PC 的一致性匹配增加了约 0.20,而相似度分数仅下降了 0.03。与 CAO 相比,Floyd 使用较少的比较成本来找到相对准确的最优匹配路径。在基于 UC 和 PC 的方法中,这可以通过在相同时间成本下对一致性矩阵进行更多更新来实现更精确的一致性近似。换句话说,在 CAO 中有 T 的一致性矩阵更新,而在 Floyd 中有 N 的迭代次数,其中 T (迭代轮数)远小于总图 N 的数量。对于 Floyd-C 和 CAO-C,比较少意味着前者的时间成本比后者少,如图4-2f、图4-3f和图4-31所示。



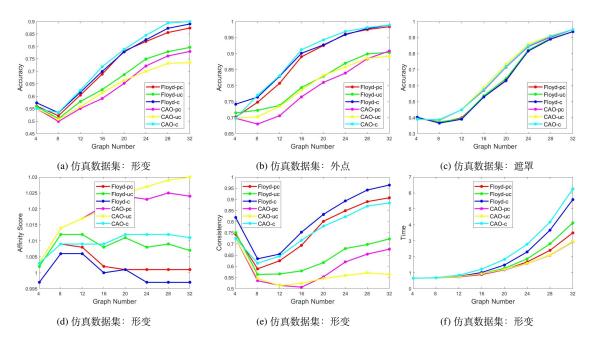


图 4–2 离线多图协同匹配求解器 MGM-Floyd 和 $CAO^{[7]}$ 在仿真数据集(形变、外点、遮罩)上的比较 Figure 4–2 Offline matching performance comparison on synthetic data (deform, outlier, complete) with different versions of MGM-Floyd and $CAO^{[7]}$

Category	Hungarian	Floyd-pc	Floyd-uc	Floyd-c	Spectral ^[21]	MatchLift ^[22]	MatchALS ^[23]	MISM ^[8]
Car	0.503	0.844	0.840	0.850	0.601	0.665	0.629	0.750
Duck	0.442	0.803	0.800	0.793	0.485	0.554	0.525	0.732
Motorbike	0.317	0.821	0.817	0.843	0.255	0.296	0.310	0.653
Face	0.854	1.000	1.000	1.000	0.927	0.931	0.934	0.937
Winebottle	0.543	0.934	0.930	0.931	0.630	0.700	0.669	0.814
Time (Car)	1.263	9.377	10.960	14.981	1.469	17.695	2.622	3.966

表 4-2 与现有的离线多图匹配算法在 Willow-ObjectClass 数据机上的比较,表现最好的值已经加粗. 注意, 我们通过 Hungarian^[43] 算法处理点的 CNN 特征得到二图匹配信息..

Accuracy and time (in seconds) of the state-of-the-art offline MGM algorithms on Willow-ObjectClass. Best results of MGM methods are in bold. Note to obtain the two-graph matchings, here Hungarian method^[43] is used whose input is the node-wise CNN features.

除了和 CAO 相关的方法比较以外,我们还与其他的多图匹配求解器^[8, 21-23] 在 Willow-ObjectClass 数据集上做了比较. 正如表格4–2所示,Floyd 相关方法在精度上极大程度的体现了自身的优越性.

值得注意的是,综合考虑到匹配精度和时间成本,Floyd-PC 在所有数据集上的性能是最出色的.与 CAO-PC 相比,它在真实数据集上的准确度提高了 2% 至 6%,在仿真数据集上甚至提高了 8% 至 9%.与 Floyd-C 和 CAO-C 相比,Floyd-PC 具有显著的速度,几乎比前两者垮了 1.5×甚至更高,而作为代价,匹配精度损失仅为 1% 左右.在与其他方法比较时,Floyd-P 在精度上的提升尤其明显,在摩托车这个类上,Floyd-PC 几乎比现有的这些方法中最好的^[8]



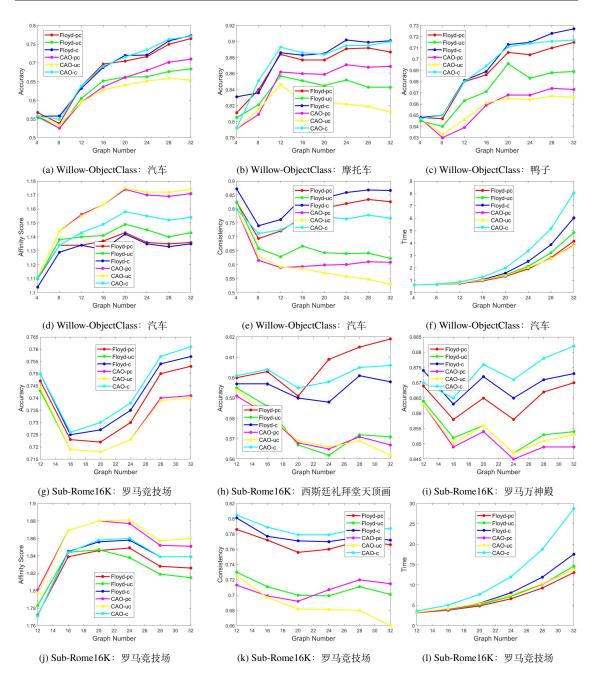


图 4–3 离线多图匹配算法 MGM-Floyd 和 CAO^[7] 在 Willow-ObjectClass 和 Sub-Rome16K 上的比较 Figure 4–3 Offline matching performance on objects from Willow-ObjectClass and Sub-Rome16K. Different versions of CAO and MGM-Floyd are tested.

高了 17%.

此外,对于包括比较方法在内的所有方法,PC 模式下的精度比 UC 精度更高,这可能是由于二图匹配一致性比单图匹配一致性的近似更加有效、更加精确所导致的. 我们对此作了额外的探究,如图 4-4所示,二图匹配一致性的近似比单图匹配一致性的近似误差更小,更加



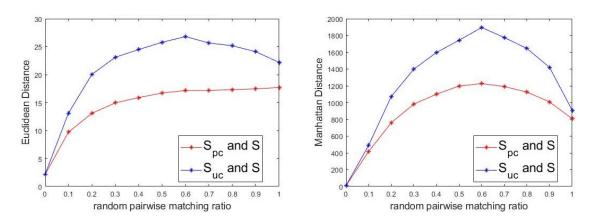


图 4-4 我们用随机置换矩阵替换掉 \mathbb{X} 其中的一部分,然后计算 S 和 S_{uc} 与 S_{pc} 之间的距离. 通过控制替换的比例(\mathbf{x} 轴)来生成大小不同的 S. 据图所示, S_{pc} 的近似比 S_{uc} 更准确

Figure 4–4 Distance from S to S_{uc} and S to S_{pc} . On ground truth \mathbb{X} , we replace part of the matchings with random permutation matrix by varying ratio (x-axis) to generate different S and the corresponding S_{uc} , S_{pc} . It is shown S_{pc}

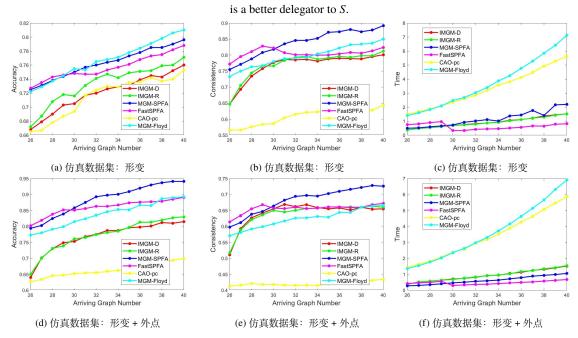


图 4-5 在线多图增量匹配求解器在仿真数据集(形变、外点)上的比较,离线方法也作为参考加在图中. Figure 4-5 Online matching performance on synthetic data (deform, deform+outlier). Offline MGM methods are also tested for efficiency comparison

贴近真实值.

4.3.2 在线模式多图增量匹配

在在线模式多图增量匹配问题中,我们比较了四种在线模式多图增量匹配求解器: MGM-SPFA,FastSPFA,IMGM-D,IMGM-R,并同时提供了两种离线方法 MGM-Floyd 和 CAO-PC



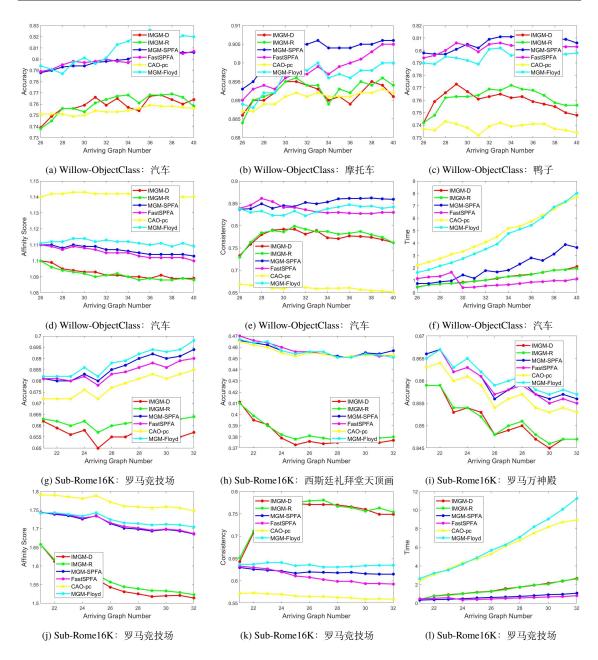


图 4-6 在线多图匹配算法在 Willow-ObjectClass 和 Sub-Rome16K 上的比较

Figure 4–6 Online incremental matching performance on Willow-ObjectClass and Sub-Rome16K. Both online and offline MGM methods are evaluated

作为时间和准确性的参考标准. 由于^[9] 中的 IMGM-D,IMGM-R 等方法都使用二图匹配一致性近似(也就是 PC 模式)作为精确一致性的近似值,因此我们在 MGM-SPFA,FastSPFA 和MGM-Floyd 中也遵循了这个模式. 在 FastSPFA 中,我们在仿真数据集、Willow-ObjectClass数据集上将每个图片集合的最少图片数量设置为 $C_{min}=15$,在 sub-Rome16k 上将最少图片数量设置为 $C_{min}=12$ (因为一共只有 32 张图).



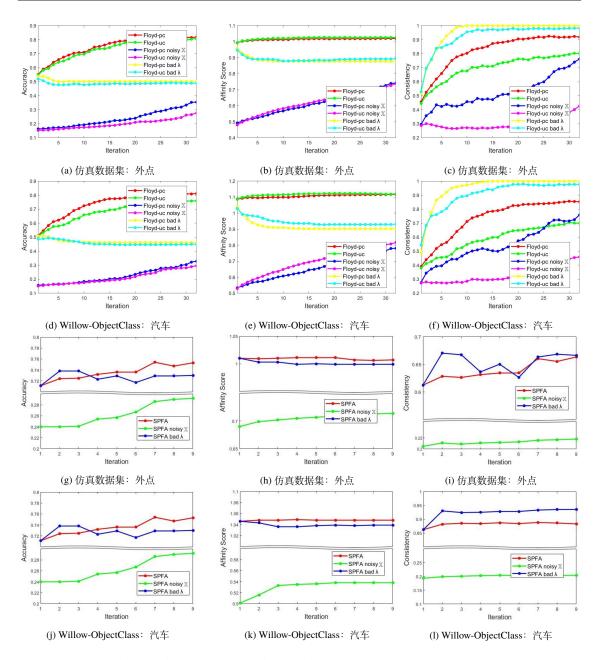


图 4-7 MGM-Floyd (前两行) 和 MGM-SPFA (后两行) 在仿真数据集外点和真实数据集汽车上的逐轮表现 Figure 4-7 MGM-Floyd (top two) and MGM-SPFA (bottom two) over iterations on synthetic outlier data and category 'car' from Willow-ObjectClass.

图 4-6和 4-5显示了各种方法在在线模式多图增量匹配问题中的表现. 我们可以看到我们提出的在线 MGM-SPFA 在所有在线方法中虽然有着更高的时间复杂度, 但与之相对的, 它的匹配精确度也远远超过其他方法. 如图4-5d所示, 在仿真数据集的"deform+outlier"测试中, MGM-SPFA 的精度甚至超过了 MGM-Floyd 大于 5%. 从相似度分数和匹配一致性的角度来看, MGM-SPFA 很好地维持了相似度分数几乎不变, 而匹配一致性则能够稳定提升. 与之相对的, IMGM 类的方法在相似度分数上, 随着图片数量的增多, 慢慢在往跌落. 我们提出的另



一个算法 FastSPFA,通过图片聚类来加速匹配,在所有数据集的在线测试中均享有最快的速度和相当不错的的匹配精度,可以说是综合表现最好的在线模式多图增量匹配求解算法. 值得注意的是,图4-5c,4-5f和4-6f中 FastSPFA 的时间曲线有突然下降的趋势,这是因为随着图片数量增多,聚类数抵达的那个临界点后增加导致的. 总的来说,FastSPFA 比 MGM-SPFA 快了 2×甚至是 4×,两者却只有约 1% 的匹配精度差异. 而与 IMGM 的方法相比,MGM-SPFA和 FastSPFA 在相似度分数、匹配一致性上全面占优,因此匹配精度上也有明显的增幅.

4.3.3 最短路算法有效性分析

如图4–2c所示,在仿真数据集的遮罩测试中给,如果初始匹配的精度给定,Floyd 算法的表现不如 CAO 算法,匹配精度较差. 根据我们前文假设1以及相关分析,距离函数 S 只有在给定合适的 λ 和良好的初始 $\mathbb X$ 的情况才能有良好的表现. 我们进一步探究最短路算法的表现与初始匹配精度的关系,在实验中,由于要控制初始匹配的精度,我们没有使用 affinity boost 技术. 实验结果如图 4–7所示.

对于 MGM-Floyd 来说,当初始精度超过 50% 且将 λ 设置为一个比较合理的值,比如 0.3 时,匹配精度会随着算法一轮轮的迭代,迅速而稳定地提高,在仿真数据集上匹配精度的提升达到了 46%,在真实数据集上也有 30% 的提升. 但是,如果初始匹配精度较低,例如 15%,精度随着迭代次数的增长效果就会十分有限. 这主要是由于初始匹配精度过低,导致假设1不再成立,从而导致距离函数 S 失去了在 Floyd 算法中应有的效果. 在实验中,我们通过将 92% 的初始匹配替换成随机匹配,以此来降低初始匹配精度. 另外,如果我们将 λ 更改为 0.8,则可以看到,在仿真成数据集和真实数据集上,随着算法的迭代,匹配精度几乎保持不变甚至还有下降的趋势. 对于 MGM-SPFA 来说,十分糟糕的初始匹配还有着巨大的影响,不过 λ 的值似乎对于算法影响没有那么大,如图4—7g和图 4—7j所示. 这主要是因为 MGM-SPFA 在更新过程中涉及的迭代次数较少以及初始精度较高,差异并不明显. 综上所述,最短路算法成立的两个十分关键的因素: 合适的 λ 和良好的初始 \mathbb{X} ,两者缺一不可

4.3.4 Affinity Boost 方法的有效性

在之前的章节中提到了一种"Affinity Boost"的技术,我们对其进行了探索,图4-8说明了 Affinity Boost 的效果. 可以看到,Affinity Boost 可以提高所有基于 Floyd 相关的方法(包括 Floyd-C,Floyd-PC,Floyd-UC)在仿真数据集和真实数据集上的匹配精度. 提升效果在仿真数据集尤为显著,使用 Affinity Boos 的方法 t 在 deform 测试中的表现优于其他方法约 6%,在 deform+outlier 测试中的表现优于其他方法约 8%. 虽然在真实图片集上,匹配精确度的提高不是那么明显,但仍然值得注意,所有基于 Floyd 的方法在 Duck 数据集上的准确性提高了 2% 并且 Affinity Boost 只是略微增加了时间成本,这对于提高匹配精度的程度来说是可以接受的.



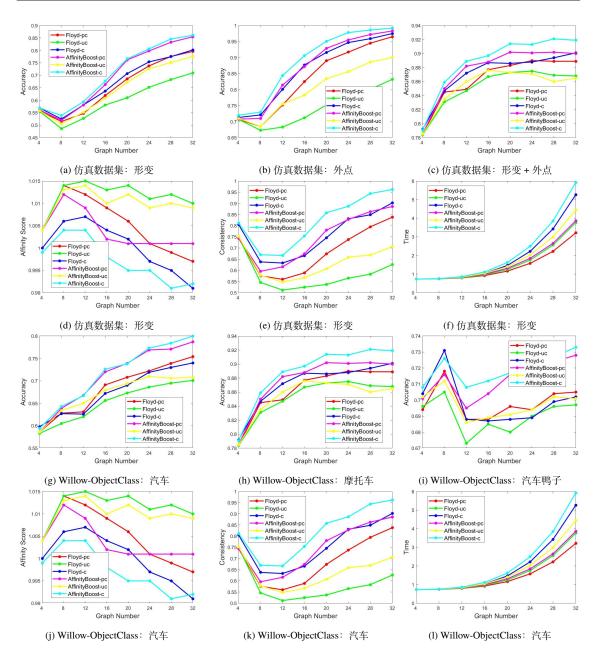


图 4–8 Affinity Boost 在仿真数据集(形变、外点、形变 + 外点)与 Willow-ObjectClass 上的表现 Figure 4–8 Affinity boost performance comparison on synthetic data (deform, outlier, deform+outlier) and objects from Willow-ObjectClass

4.3.5 离线算法鲁棒性分析

由于在线算法需要展示一个图片依次添加过程的表现,设计鲁棒性测试相对较难,结果比较难以逐轮比较,因此我们这里只设计了离线算法鲁棒性的分析。图4-9验证了我们的离线多图协同匹配算法在不同形变程度和随机外点噪声引入下的鲁棒性。从形变程度和随机外点鲁棒性方面来看,我们的 Floyd 在匹配精确性和匹配一致性上要优于 CAO, 而 Floyd-PC 则是



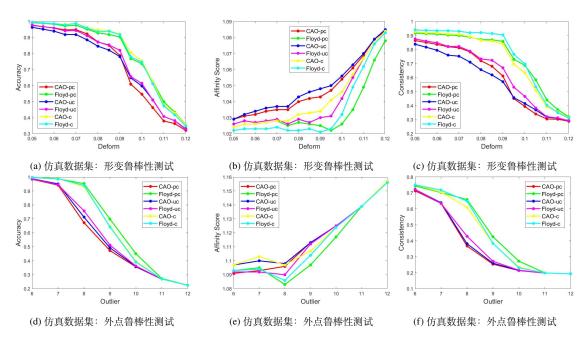


图 4-9 离线算法在形变和外点上的鲁棒性测试. 由于一些噪声,标准匹配的相似度分数 (为 1) 并不是最高的 Figure 4-9 Robustness test of offline methods over deformation, outliers. Due to noise, ground truth's affinity (equals to 1) is not the highest

优于所有其他方法, 在不同形变程度测试中 $\epsilon \in [0.09, 0.11]$, Floyd-PC 与 CAO-C 和 Floyd-C 几乎达到了相同的精度,比其他方法高了大约 10% 的匹配精度. 在随机外点噪声测试中,Floyd-PC 甚至有更大的精度提高:与基于 C 的方法相比,匹配精度高了约 5%, 而与其他方法相比,精度提高了 10% 至 20% 左右.

另外,我们还发现仿真数据集和真实数据集都表明我们的算法具有比较好的鲁棒性. 如图 4-3和图 4-9所示,我们可以看到在绝对精度在 0.5 左右时,我们的算法比其他的方法有着非常明显的提升. 而随着绝对匹配精度的继续降低或升高,我们算法的优势也会逐渐表笑. 这说明我们的算法在处理处理附在情况时能力更加突出,图 4-6也体现出 MGM-SPFA 和 FastSPFA 拥有类似的性质.

4.3.6 参数敏感度分析

图4–10展示了我们提出的算法针对不同的 λ 值、不同 C_{min} 的敏感程度. 我们可以看到,相速度分数和匹配一致性之间的平衡可以带来更好的性能,而比较极端的值例如 $\lambda = 0.1$ 或 0.7 将导致算法的表现大幅度退化,不论是在仿真数据机还是在真实数据集上. MGM-SPFA 也表现出相似的行为,对于 $\lambda \in [0.3,0.5]$,方法的表现甚至更加稳定. 当 $\lambda \in [0.3,0.5]$ 时,MGM-SPFA 匹配精度的波动只有分别为仿真数据集上 2% 和真实数据集上 1% 时. 聚类数实验的结果如图4–10所示. 我们可以看到,当增加 C_{min} 时(这意味着每个分组中的图片数量会更多),FastSPFA 精度稳步提高,但是同样的时间成本也在增加. 如图4–10h和4–10i所示,这种准确性的提高是由一致性的逐步提高引起的,而相似度分数几乎保持不变.



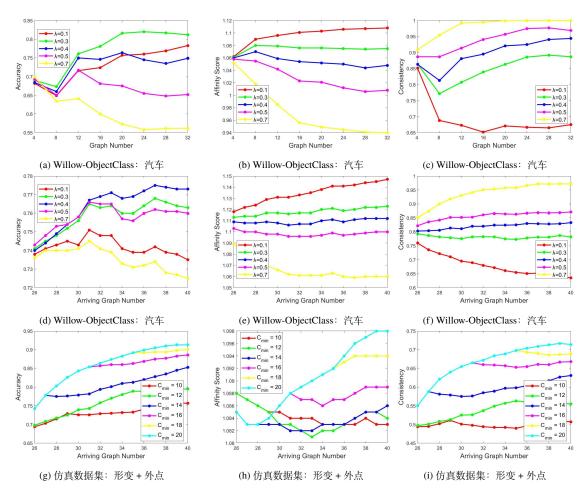


图 4–10 对于 Floyd 中的 λ (上方)、SPFA 中的 λ (中间) 和 FastSPPFA 中的 C_{min} (下方) 的敏感性测试 Figure 4–10 Sensitivity test of weight parameter λ in Eq. 3–4 for MGM-Floyd (top), MGM-SPFA (middle) and C_{min} (i.e. the least number of graphs in a cluster) for FastSPFA (bottom) on synthetic data and category 'car' from Willow-ObjectClass.

4.4 本章小结

本章主要介绍了对于我们提出方法的实验效果测试. 我们主要在仿真数据集和两个真实数据集(Willow-ObjectClass 与 Sub-Rome16k)上全面测试了我们方法的性能,主要分为: 离线模式多图协同匹配性能测试、在线模式多图增量匹配性能测试、最短路算法分析有效性测试、Affinity Boost 方法有效性测试、离线算法鲁棒性分析、参数敏感度分析六个方面展开,综合评价了我们的方法的优势与劣势所在.



全文总结

总的来说,本文研究了在超图上找到最佳匹配路径来求解多图匹配的问题,通过对匹配路径的相似度分数和匹配一致性进行仔细的数值研究,本文将离线和在线多图匹配公式化为分别在超图上查找所有成对的最短路径和单源最短路径的任务。基于此设计的多图匹配算法MGM-Floyd,MGM-SPFA 还有 SPFA 在实验中表现如下:

- 1. 对于离线模式下多图协同匹配问题来说,在仿真数据集与真实数据上,MGM-Floyd 在精度和时间上的综合表现都要优于 CAO^[7]
- 2. 对于在线模式下多图增量匹配问题来说,我们提出的 MGM-SPFA 在仿真数据集与真实数据上比 IMGM^[9] 在匹配精度上有显著的提高. 另外一个提出的加速版本 FastSPFA 更是全方位超过了 IMGM, 无论是精度还是速度.
- 3. 实验很好地支持了我们对于假设 1的理论分析. 当初始匹配 ※ 的准确性太低时,例如小于 10% 时,或者当权重参数被故意设置得太高时,例如 λ = 0.8,我们方法的迭代改进可能比 CAO^[7] 受到更多限制. 「不过在采用现有二图匹配求解器,例如 RRWM^[11],我们可以轻松获得良好的初始 ※,并且我们的相关研究表明,我们的方法对于数据与参数都具有相当不错的鲁棒性.

多图匹配主流方法一般通过松弛条件实现在连续空间优化匹配,或是通过优化子图上的匹配来实现目标优化.而本文则是通过匹配链搜索的方法优化多图匹配,推动了多图离散优化领域的发展,引入经典最短路更是为多图离散优化这个领域拓宽了思路,具有极大的参考价值.

¹在这种情况下,方法^[7,9] 也不会有比较好的表现,因为^[7] 中已经有相关的说明。



参考文献

- [1] LOIOLA E M, de ABREU N M M, BOAVENTURA-NETTO P O, et al. A survey for the quadratic assignment problem[J]. European journal of operational research, 2007, 176(2): 657-690.
- [2] LAWLER E L. The quadratic assignment problem[J]. Management science, 1963, 9(4): 586-599.
- [3] FLOYD R W. Algorithm 97: shortest path[J]. Communications of the ACM, 1962, 5(6): 345.
- [4] MOORE E.F. The shortest path through a maze[C]//Proc. Int. Symp. Switching Theory, 1959. 1959: 285-292.
- [5] DUAN F. A Faster Algorithm for Shortest-Path SPFA [J][J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 1994, 29(2).
- [6] HENZINGER MR, KLEIN P, RAO S, et al. Faster shortest-path algorithms for planar graphs[J]. Journal of computer and system sciences, 1997, 55(1): 3-23.
- [7] YAN J, CHO M, ZHA H, et al. Multi-Graph Matching via Affinity Optimization with Graduated Consistency Regularization[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2016, 38(6): 1228-1242.
- [8] WANG Q, ZHOU X, DANIILIDIS K. Multi-image semantic matching by mining consistent features[C]//Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2018: 685-694.
- [9] YU T, YAN J, LIU W, et al. Incremental multi-graph matching via diversity and randomness based graph clustering[C]//Proceedings of the European Conference on Computer Vision (ECCV). 2018: 139-154.
- [10] ZHANG Z. Iterative point matching for registration of free-form curves and surfaces[J]. International journal of computer vision, 1994, 13(2): 119-152.
- [11] CHO M, LEE J, LEE K M. Reweighted random walks for graph matching[C]//European conference on Computer vision. 2010: 492-505.
- [12] YAN J, ZHANG C, ZHA H, et al. Discrete hyper-graph matching[C]//Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2015: 1520-1528.
- [13] LIU Z Y, QIAO H, YANG X, et al. Graph matching by simplified convex-concave relaxation procedure[J]. International Journal of Computer Vision, 2014, 109(3): 169-186.
- [14] LEORDEANU M, HEBERT M. A spectral technique for correspondence problems using pairwise constraints[C]//Tenth IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'05) Volume 1: vol. 2. 2005: 1482-1489.



- [15] LEORDEANU M, SUKTHANKAR R, HEBERT M. Unsupervised learning for graph matching[J]. International journal of computer vision, 2012, 96(1): 28-45.
- [16] GOLD S, RANGARAJAN A. A graduated assignment algorithm for graph matching[J]. IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence, 1996, 18(4): 377-388.
- [17] Van WYK B J, van WYK M A. A pocs-based graph matching algorithm[J]. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, 2004, 26(11): 1526-1530.
- [18] FRAUNDORFER F, SCARAMUZZA D. Visual odometry: Part ii: Matching, robustness, optimization, and applications[J]. IEEE Robotics & Automation Magazine, 2012, 19(2): 78-90.
- [19] YAN J, TIAN Y, ZHA H, et al. Joint optimization for consistent multiple graph matching[C]// Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision. 2013: 1649-1656.
- [20] HUANG Q X, GUIBAS L. Consistent shape maps via semidefinite programming[C]// Computer Graphics Forum: vol. 32: 5. 2013: 177-186.
- [21] PACHAURI D, KONDOR R, SINGH V. Solving the multi-way matching problem by permutation synchronization[C]//Advances in neural information processing systems. 2013: 1860-1868.
- [22] CHEN Y, GUIBAS L, HUANG Q. Near-Optimal Joint Object Matching via Convex Relaxation[C]//International Conference on Machine Learning. 2014: 100-108.
- [23] ZHOU X, ZHU M, DANIILIDIS K. Multi-image matching via fast alternating minimization[C]//Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision. 2015: 4032-4040.
- [24] SHI X, LING H, HU W, et al. Tensor power iteration for multi-graph matching[C]// Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2016: 5062-5070.
- [25] LEONARDOS S, ZHOU X, DANIILIDIS K. Distributed consistent data association via permutation synchronization[C]//2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). 2017: 2645-2652.
- [26] HU N, HUANG Q, THIBERT B, et al. Distributable consistent multi-object matching[C]// Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2018: 2463-2471.
- [27] YAN J, YIN X C, LIN W, et al. A short survey of recent advances in graph matching[C]// Proceedings of the 2016 ACM on International Conference on Multimedia Retrieval. 2016: 167-174.
- [28] YAN J, WANG J, ZHA H, et al. Consistency-driven alternating optimization for multigraph matching: A unified approach[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2015, 24(3).
- [29] BERNARD F, THUNBERG J, GONCALVES J, et al. Synchronisation of partial multimatchings via non-negative factorisations[J]. Pattern Recognition, 2019, 92: 146-155.



- [30] BIRDAL T, SIMSEKLI U. Probabilistic Permutation Synchronization Using the Riemannian Structure of the Birkhoff Polytope[C]//2019 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2019: 11097-11108.
- [31] LEONARDOS S, DANIILIDIS K. A distributed optimization approach to consistent multiway matching[C]//2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2018: 89-96.
- [32] KIM V G, LI W, MITRA N J, et al. Exploring collections of 3D models using fuzzy correspondences[J]. ACM Transactions on Graphics, 2012, 31(4): 54.
- [33] SWOBODA P, KAINM"ULLER D, MOKARIAN A, et al. A Convex Relaxation for Multi-Graph Matching[C]//The IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2019.
- [34] CHAKRABORTY A, DAS A, ROY-CHOWDHURY A K. Network consistent data association[J]. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, 2016, 38(9): 1859-1871.
- [35] YAN J, XU H, ZHA H, et al. A Matrix Decomposition Perspective to Multiple Graph Matching[C]//2015 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). 2015: 199-207.
- [36] YAN J, Zhe Ren, ZHA H, et al. A constrained clustering based approach for matching a collection of feature sets[C]//2016 23rd International Conference on Pattern Recognition (ICPR). 2016: 3832-3837.
- [37] LEORDEANU M, HEBERT M, SUKTHANKAR R. An Integer Projected Fixed Point Method for Graph Matching and MAP Inference[G]//BENGIO Y, SCHUURMANS D, LAFFERTY J D, et al. Advances in Neural Information Processing Systems 22. Curran Associates, Inc., 2009: 1114-1122.
- [38] LEE J, CHO M, LEE K M. Hyper-graph matching via reweighted random walks[C]//CVPR 2011. 2011: 1633-1640.
- [39] ZHOU F, DE LA TORRE F. Factorized graph matching[C]//2012 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2012: 127-134.
- [40] CHO M, ALAHARI K, PONCE J. Learning Graphs to Match[C]//2013 IEEE International Conference on Computer Vision. 2013: 25-32.
- [41] LI Y, SNAVELY N, HUTTENLOCHER D P. Location recognition using prioritized feature matching[C]//European conference on computer vision. 2010: 791-804.
- [42] KRIZHEVSKY A, SUTSKEVER I, HINTON G E. Imagenet classification with deep convolutional neural networks[C]//Advances in neural information processing systems. 2012: 1097-1105.
- [43] KUHN H W. The Hungarian method for the assignment problem[C]//Export. Naval Research Logistics Quarterly. 1955: 83-97.



致 谢

四年前,一个懵懂无知的少年走进上海交通大学,四年后,满怀理想的青年离开交大杨帆起航.光阴荏苒,日月如梭,四年大学时光如白驹过隙一晃而过.回首四年,有太多太多的感动与感谢,太多太多的不舍与不愿.

首先我想感谢的我的项目主任俞勇老师. 是他引领我走进了 ACM 的大门, 还记得他在招生时对我的指导与期望; 还记得他在学子讲坛上对我们班的谆谆教诲, 如何做好一个人, 如何做好一个科学家; 还记得他在大一下与每一个 ACM 班同学的谈话, 他会倾听每个人的经历, 每个人的迷茫并给予解答. 至今还记得那一句: "ACM 班就是上海交大的黄埔军校, 贪生怕死莫入此门, 升官发财请走别路."

其次,我要感谢的是我的科研导师——严骏驰老师. 他对于我科研生活的影响是巨大无比、不可磨灭的. 毫不夸张的说,如果不是严老师对我的影响,我现在未必热衷于计算机的科研事业,更不可能在本科阶段就取得这样的研究成果.. 在科研上,他并不像某些老师一样急功近利疯狂 push 学生,也不想某些老师一样完全放任学生自我成长. 他以一种相对温和的方式,给予同学们一个独立思考、成长的空间,让他们体会到学术钻研的乐趣,又能在同学们遇到困难的时候及时地提供十分可靠的帮助. 我觉得我十分的幸运,能够在我科研启蒙阶段遇到严老师作为我的导师.

我还要感谢我的室友: 王天哲、王辰、何继路. 他们三个陪办了我大学四年的时光,让 我觉得寝室是一个像家一样温馨的地方. 他们在我失意落寞时安慰我,又在我成功时分享我 的喜悦. 我永远不会忘记在寝室里面讨论学术、讨论人生、讨论政治、讨论理想、讨论爱情 的一个个不眠之夜,在熄了灯的寝室中,四颗炽热的心却紧紧地连在一起.

我还想感谢我的父母,是他们 4 年以来一直默默支持着我,让我拥有前行的动力;我还想想感谢 ACM,让我遇见了一群可爱的人一同奋斗与成长;我想感谢致远,让我遇到了很多尽职尽责的老师,每当我遇到困难的时候,他们都会竭尽全力的伸出双手;我还想感谢交大,将 4 年美好的时光永久镌刻进了我的灵魂……

太多太多的感谢,难以一一诉说,我只能在这里轻轻地祝福那些曾经帮助过我的人还有我自己,能够永远及得这一段美好的时光.



UNIFYING OFFLINE AND ONLINE MULTI-GRAPH MATCHING VIA FINDING SHORTEST PATHS

Graph matching (GM) refers to finding node correspondences among two or multiple graphs given an affinity model. Unlike point matching, which usually only considers the node-wise unary affinity, GM models the second-order or higher-order information for more robust matching against local noise.

This paper addresses the problem of multiple graph matching (MGM) by considering both offline and online settings. We follow the idea of matching composition optimization to solve multiple graph matching problem: finding optimal matching composition on supergraph whose vertices refer to graphs and edges denote the pairwise matching between two graphs. To our best knowledge, we are the first one to formulate the offline and online MGM as the task of finding all pairwise shortest paths and single-source shortest paths on supergraph, respectively. Based on that, we design two MGM solver: offline MGM solver MGM-Floyd and online MGM solver MGM-SPFA. Moreover, we also propose FastSPAF, an efficient version of MGM-SPFA under the online setting. All the proposed methods achieve superior performance on synthetic and real-world data against SOTA.

In Related Work Chapter, we review the field of graph matching, especially, multiple graph matching. First we regard our methods as a discrete MGM method. This category also includes the composition based method CAO^[7] and the tree structure based approach MatchOpt^[28] that both iteratively transform the MGM problem into a two-graph matching one, and employ an off-the-shelf two-graph matching solver in each iteration to update the matchings, whereby the cycle consistency constraint is either automatically satisfied or encouraged. Another line of works^[8, 20, 22] etc. try to solve the MGM problem in two stages. In the first stage, also a two-graph matching solver is adopted to obtain the initial (and possibly very inconsistent) pairwise matchings. Then in the second stage, the global consistency is pursued via certain continuous optimization methods such as spectral clustering^[21], semidefinite programming^[20] and further robust improvement^[22] using alternating direction methods of multipliers (ADMM) that can address the partial multi-graph matching setting. Differing from the above methods that separate the affinity based two-graph matching and consistency driven smoothing in two stages, some other works e.g. MatchALS^[23] also explore the joint optimization regarding with consistency and affinity by relaxation in continuous space. The third thread of studies which are loosely related to ours is the rank-1/clustering based methods, whereby continuous based techniques like matrix decomposition^[35], k-means clustering^[36], and density-based clustering^[tron2017fast] are adopted. Note in these methods, often only node features are used rather than the edge information. We also analyze the drawbacks of peer methods in following chapter. In our analysis, there are some limitations for



continuous MGM methods: 1) the relaxation is an approximation to the raw matching problem which causes unwanted (even unbounded) model deviation, as discussed in two-graph matching^[37]. This difficulty is pronounced for the complex MGM problem; 2) the relaxed optimization problem for MGM is still very challenging for its non-convexity, hard constraints, and high-dimensionality, which either cause scalability issue (e.g. MatchLift^[22]), or limited exploration to geometric edge information (e.g. MatchALS^[23]); 3) it still requires a post-processing step to round the continuous solution into (partial) permutation matrices, since the relaxation mostly cannot ensure a convergence to a matching solution.

In Methods Chapter, we first prove the score function S, which consists of affinity score and cycle consistency, owns similar property with the distance function defined in the shortest path problem. More Specifically, given proper λ and relatively good initial \mathbb{X} , suppose S obey the following property: $S(\mathbf{X}_{ij}) < S(\mathbf{X}'_{ii}) \Longrightarrow S(\mathbf{X}_{ij}\mathbf{X}_{jk}) < S(\mathbf{X}'_{ij}\mathbf{X}_{jk})$, In other words, if $S(\mathbf{X}_{ij}) < S(\mathbf{X}'_{ij})$, replacing X_{ij} in any composition path with X'_{ij} can lead to better path: we have no worry about optimizing the path between G_i and G_j will affect the optimal solution between the other two vertices. We prove the proposition seperately, by proving the property holds for both affinity score and cycle consistency. In another word, we prove: let μ be a uniform distribution of all possible permutation matrices. If $J(\mathbf{X}_{ij}) > J(\mathbf{X}_{ij}'), \text{ it holds that } \mathbb{E}_{X_{ik} \sim \mu}[J(\mathbf{X}_{ij}\mathbf{X}_{jk})] > \mathbb{E}_{X_{ik} \sim \mu}[J(\mathbf{X}_{ij}'\mathbf{X}_{jk})] \text{ and if } C_p(\mathbf{X}_{ij}, \mathbb{X}) < C_p(\mathbf{X}_{ij}', \mathbb{X}),$ we claim that $C_p(\mathbf{X}_{ij}\mathbf{X}_{jk},\mathbb{X}) < C_p(\mathbf{X}'_{ij}\mathbf{X}_{jk},\mathbb{X})$. And then combine them together to prove the property above. Based on that proposition, we introduce dynamic programming Floyd algorithm and SPFA algorithm into multiple graph matching problem and design two MGM solver: offline MGM solver MGM-Floyd and online MGM solver MGM-SPFA. Compared to peer mehods^[7,9], the proposed methods can search the solution space more efficient with less comparison and calculation. We further accelerate our methods with other technique like: consistency approximation, asynchronous update and graph clustering. It worth noting that we also design FastSPFA, an efficient version of MGM-SPFA, which accelerate the matching process by dividing the supergraph into several small subgraph and applying MGM-SPFA for each. In the end of the Methods Chapter, we discuss our methods' advantages over other peer methods. our methods do not suffer from the rounding issue. More specifically, we give a dynamic programming based algorithm to more effectively and efficiently explore the search space directly in the discrete space. The consistency constraints are basically automatically satisfied, rather than as a burden in the optimization objective which is often hard to optimize. Moreover, our discrete MGM approach can reused offthe-shelf two-graph matching solvers in an out-of-box manner regardless it is a discrete solver or a continuous one.

In Experiment Chapter, we first formulate the protocols of our experiments, including the dataset, affinity matrix construction, two-graph solver choice, experiments' hardware setting, and hyperparameters setting. Then we perform 6 experiments in total: offline comparison, online comparison, effectiveness analysis, affinity boost performance, robustness against noise, and sensitivity test of λ and cluster counts. We draw a few concluding remarks as follows: 1) For offline setting, MGM-Floyd outperforms CAO^[7] on both synthetic and real datasets in accuracy and consistency, with similar



time cost. It further notably outperforms recent MGM algorithms^[8, 21-23] in accuracy, though being less efficient than these continuous relaxation methods; 2) For online setting, the proposed MGM-SPFA outperforms compared methods IMGM^[9] on both synthetic and real datasets in accuracy and slightly more time overhead. Moreover, our speedup version FastSPFA further outperforms IMGM^[9] in accuracy, consistency and efficiency; 3) The experiments well support our numerical analysis i.e. Assump. 1, based on which our methods are devised. When the accuracy of initial matchings $\mathbb X$ is too low e.g. less than 10%, the improvement by iterations of our methods can be more restricted than CAO^[7], or when the weight parameter is intentionally set too high e.g. $\lambda = 0.8$. Note methods^[7, 9] will also fail given large λ as already shown in^[7]. Fortunately, these settings are hardly possible since the employing off-the-shelf two-graph matching solver e.g. RRWM, RRWHM^[11, 38] can easily obtain good initial $\mathbb X$ and our sensitivity study has shown the robustness of our methods to λ , different two-graph matching solvers, and scale of nodes for graphs to be matched.

All in all, this paper addresses the problem of multiple graph matching (MGM) by considering both offline batch mode and online setting. We explore the concept of cycle-consistency over pairwise matchings and formulate the problem as finding optimal composition path on the supergraph, whose vertices refer to graphs and edge weights denote score function regarding consistency and affinity. By our theoretical study we show that the offline and online MGM on supergraph can be converted to finding all pairwise shortest paths and single-source shortest paths respectively. We adopt the Floyd algorithm^[3] and shortest path faster algorithm (SPFA)^[4, 5] to effectively find the optimal path. Extensive experimental results show our methods surpass state-of-the-art MGM methods, including CAO^[7],MISM^[8], IMGM^[9] and many other recent methods in offline and online settings.