

上海交通大学

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

学士学位论文

THESIS OF BACHELOR



论文题目： 在需求预测下风险共担对系统不确定性的分析

学生姓名： 沈云帆

学生学号： 5091209043

专 业： 工商管理-物流管理方向

指导教师： 荣 鹰

学院(系)： 安泰经济与管理学院

在需求预测下风险共担对系统不确定性的分析

摘要

本文旨在通过对于风险共担报童模型的分析研究,比较在未知需求分布的情况下,集中供应与分散供应两种策略的优劣,以及决定商品订货量的方法,最终帮助企业寻找到最优的运营策略组合,力求使得节省库存成本,降低库存风险。

现有文献对于风险共担(risk pooling effect)主要假设需求分布已知。但是实践中,往往需求分布是未知的。在这种情况下,风险共担(集中供应)是否仍然是有效应对不确定性的策略?这是本研究的重点。

为了研究这个问题,我们把模型分成两类,包括需求独立同分布,以及需求独立属于同类分布但分布参数不同这两种情况。首先我们假设有多个需求点。在已获取每个需求点历史销售数据的情况下,我们需要决定每个仓库对下一销售周期的订货量。

在基于此模型的基础上,将两种供应策略(集中供应与分散供应)以及两种订货量决定方法(参数变量法与决策变量法)相互结合,分别通过模拟给出四种策略组合的利润值,并设定一系列的指标进行统计,最后通过量化指标找出最优的策略组合。

同时,在此基础上,进一步观测报童模型的参数变化会对于企业最优决策,以及集中供应相对分散供应优势的影响。

关键词: 多区域报童问题, 集中供应, 未知分布参数, 需求模拟, 参数估计, 回归分析

TO POOL OR NOT TO POOL RISK POOLING EFFECT UNDER DEMAND ESTIMATION

ABSTRACT

The primary purpose of this paper is to study the risk pooling effect of multi-location newsvendor problem. The traditional research of multi-location newsvendor problem focuses on known distribution demand, while we consider demand with unknown distribution parameter in our model.

The paper considers both i.i.d. distribution (independent and identical) and independent, not identical distribution. It compares the strategies of both centralization and decentralization under unknown distribution. Also, it introduces two ways of order quantity making. One is to separate estimation and optimization, and the other is to combine estimation and optimization. Based on the principle of profit maximization, a way of measuring the effect of four combinations of strategies is offered to help the company choose the best strategy.

Furthermore, the paper studies the interaction between parameters of the newsvendor model and the advantage of centralization over decentralization, as well as the effects on the decision of strategies.

Key words: Multi-location newsvendor model, risk pooling effect, unknown distribution, centralization, demand simulation, parameter estimation, regression

目 录

第一章 绪论	1
1.1 多区域条件下集中供应报童问题的研究现状	1
1.1.1 报童问题研究现状	1
1.1.2 多区域集中供应报童问题研究现状	4
第二章 已知分布参数多区域报童问题基本模型及分析	6
2.1 问题描述	6
2.1.1 模型背景	6
2.1.2 企业面临的问题	6
2.1.3 模型目标	6
2.2 已知需求分布下多区域报童问题基本模型	6
2.3 已知需求分布下集中供应与分散供应对期望利润的比较	8
第三章 未知分布参数下多区域报童问题数据模拟与分析	13
3.1 未知分布参数下多区域报童问题的背景	13
3.1.1 模型背景描述	13
3.1.2 两种订货量决定方法	13
3.1.3 未知分布参数下多区域报童模型目标	13
3.2 需求分布未知且独立同分布下多区域报童问题基本模型	14
3.2.1 模型定义	14
3.2.2 基本公式推理	14
3.3 给定参数下的数据模拟	15
3.3.1 单次模拟步骤	16
3.3.2 模拟次数的确定	18
3.3.3 同组参数下的 10000 次模拟	20
3.4 同组参数下模拟结果的数据分析	20
3.4.1 针对企业决策的数据分析	20
3.4.2 分散供应与集中供应的利润比较	22
第四章 需求独立同分布下模型参数对于最优策略的影响	24
4.1 需求区域数改变的影响	24
4.2 需求周期个数对于企业最优策略的影响	25
4.3 商品的成本与价格对于企业最优策略的影响	26
4.3.1 当 s 增大时各指标的统计与分析	26
4.3.2 当 s 减小时, 各指标的统计与分析	27
4.3.3 改变商品成本 c 对于企业策略的影响	29
4.4 真实需求分布参数对于企业最优策略的影响	30
4.5 本章小结	31
第五章 需求独立非同分布下多区域报童问题的数据模拟	32
5.1 独立非同分布报童问题的模型	32
5.2 需求独立非同分布下商品订货量的确定	33

5.2.1 分散供应下的订货量确定.....	33
5.2.2 模拟与回归分析法	33
5.2.3 集中供应下的订货量确定.....	34
5.3 需求独立非同分布的企业策略组合的选择.....	35
第六章 总结	37
参考文献	39
谢辞	40

第一章 绪论

目前,库存管理已经成为供应链管理乃至企业管理中的重要课题。美国供应链管理协会出具的美国物流年度报告中显示,2011年,美国库存持有成本超过400亿美元,约占当年GDP总量的2.77%,与美国相比,中国2011年库存持有成本约2900亿人民币,约占GDP总量6.21%,这一比例是美国的两倍多。一方面,中国制造业产值位居世界第一,又是出口大国,外需的不确定性和波动性必然导致库存持有成本增加;而另一方面,中国目前的库存管理水平和美国差距较大^[1]。

库存管理的有效性不仅体现在库存成本上,同时还反映在企业对于库存风险的经营。近几年有许多例子可以证明,企业对库存风险管理不善,会导致巨额亏损甚至陷入经营危机。2008年国内出口企业高库存导致的严重后果依然让人记忆犹新。即使在2008年中期,许多企业还维持较好的盈利,但到9月全球金融危机爆发后,企业未能有效应对不确定风险,先前囤积的存货出现大面积滞销,收入萎缩,企业计提减值准备,最终导致当年众多公司尤其是上市公司出现巨额亏损。

即使是在经济稳定增长的年代,也存在着库存风险。2012年国内钢铁市场生产过剩,需求疲软,钢铁价格持续走低,让许多国内大型钢铁厂面临巨额的亏损,尽管宝钢等一些企业已经开始实施“去库存”战略,然而对于风险的预判错误导致的损失已经无法挽回。

由此可见,库存管理水平影响企业的经营状况。降低库存成本,管理库存风险,优化供应链结构,是企业持续稳定发展的关键。本文旨在通过对于风险共担报童模型的分析研究,比较在未知需求分布的情况下,多区域报童问题集中供应以及分散供应对企业利润的影响,掌握库存成本及风险的控制的方法,力求最终能帮助企业节省库存成本,降低库存风险。

1.1 多区域条件下集中供应报童问题的研究现状

报童问题是库存管理中的重要问题,是指在供应链中,经销商企业需要综合考虑产品需求、成本、售价等多方面因素,做出一次性的订货量选择,以使得企业的利润最大化。

多地点条件下集中供应报童问题是基于库存管理中报童问题的拓展,与传统报童问题联系密切,主要研究在存在多个供应点的环境下,集中控制或分散控制对期望收益的影响。所谓的集中控制,是指在一个拥有多个需求点的供应链中,供应商针对这些需求点统一订货并分配给各个需求点。与此相对应,分散控制是指供应链系统存在多个供应点,每个供应点自己选择最优的订货量以满足供应点所对应的需求。Eppen^[2]在1979年对多地点条件下集中供应报童问题提出探讨,在此之后又有学者对这一问题进一步拓展和延伸,使得多地点集中供应问题成为报童问题中的重要分支。

1.1.1 报童问题研究现状

传统报童问题(即单周期库存管理问题)是供应链管理中经典的库存管理模型,其研究的是在随即市场环境下,零售商寻求其利润最大化的订购量。这一问题最早由经济学家Edgeworth(1888)^[3]首次提出,用以解决银行的现金流问题。进入二十世纪,报童问题开始逐渐被应用于供应链管理领域,并取得了重大的突破。关于报童模型及其拓展问题,国内外已有了非常多的研究。Whitin(1955)^[4]将需求因素和价格问题考虑到库存控制理论中,进而拓展了报童模型。在他所著的Inventory Control and Price Theory中,将包含了经济批量分析和需求函数的模型运用到时尚商品中,在他的模型中,他将商品售价看作是决策的量而非定量参数,商品售价和库存量受需求分布同步影响。在这种理论上他从报童模型中寻求最优的库存持有量和商品售价。

对于传统报童问题,存在两种解决方法,一种是成本最小化,另一种是利润最大化。本

文所采用的是第二种方法。M.Khouja(1999)^[5]对于传统报童问题的利润最大化进行了梳理：

首先定义变量：

x	产品需求(随机变量)
$f(x)$	x 的概率密度函数
$F(x)$	x 的概率累计函数
Q	订货量(决策变量)

定义参数：

P	每单位产品价格
C	每单位产品成本
V	每单位产品残余价值
S	每单位产品缺货成本
C_o	$C - V$, 每多订一产品的成本
C_u	$P - C + S$, 每少订一产品的成本

根据定义，可知企业商品利润：

$$\pi = \begin{cases} (P - C)Q - S(x - Q), & \text{if } x \geq Q \\ Px + V(Q - x) - CQ, & \text{if } x < Q \end{cases} \quad (1-1)$$

经过整理，得出：

$$\begin{aligned} E(\pi) = & C_u \int_Q^\infty Qf(x)dx - S \int_Q^\infty xf(x)dx \\ & + (P - V) \int_0^Q xf(x)dx - C_o \int_0^Q Qf(x)dx \end{aligned} \quad (1-2)$$

令：

$$\frac{\partial E(\pi)}{\partial x} = 0$$

得出最优订货量：

$$Q^* = F^{-1}\left(\frac{C_u}{C_o + C_u}\right) \quad (1-3)$$

在经典报童问题被提出后，随着运营管理的不断发展，学者们对于报童问题不断丰富巩固，使得报童问题的研究越来越深入，方向也越来越多元化。M.Khouja 对于当代供应链报童问题的研究方向进行了总结，目前除了多地点报童问题，有如下几个主要的分支：

(1) 目标和效用函数不同

传统报童问题中, 目标在于使期望利润最大化, 这在一定程度上无法反映现实企业管理者的真正需求。在实际中, 企业往往更倾向于关注取到较高利润的可能性。因此, 一些学者对于传统报童问题做出改进, 提出多种方法, 使得报童模型更贴近实际。Kabak 与 Schiff^[6] 将报童问题中超过某一特定利润 B 的概率记为 P_B , 将传统报童问题目标函数即最大化利润修改为最大化 P_B 。而另外有些学者引入风险容忍度, 效用函数等概念, 以优化报童模型。

(2) 供应商定价

所谓供应商定价, 是指在报童问题中, 企业上游供应商可以自主决定商品售价。在这种情况下, 传统报童模型中的成本 C 不再是固定不变的。上游供应商可以根据企业对商品的订货量给予一定的优惠, 主要包括三种形式: 一是统一折扣, 即供应商对所有的商品进行折扣, 在这种情况下, 成本对应订货量是间断函数; 二是累进折扣, 即对订货量中超出的部分进行折扣, 在这种情况下, 成本对应订货量是连续函数; 三是运输折扣, 是供应商为鼓励满载而对商品进行部分折扣。

(3) 销售商定价

传统报童模型假设商品售价是固定的, 然而现实中对于一些占有较大份额的商品, 企业可以自主决定商品售价。在这种情况下, 定价是非固定的, 而商品的市场需求随定价波动而变化。Whitin^[4] 用累进分析法得出了在这种模型下的最优定价和订货量。Mills 在此基础上加入了市场需求风险的因素, 得出在存在市场风险时, 商品最优定价高于无风险价格。

(4) 产能不定

产能不定的报童问题是指, 由于上游供应商生产线停工等原因, 导致企业的商品供应不稳定。相对于传统报童问题只考虑需求不稳定的情况, 产能变动下的报童问题需要从供给与需求两方面同时考虑。Ciarallo^[7] 为了解决这一问题, 假定企业的产量服从已知分布参数, 并证明了当商品持有成本和缺货成本线性的情况下, 利用成本函数为非凸函数, 但利用传统报童问题的凸性方法, 同样可以得到最优解。Jain 和 Silver^[8] 提出企业向上游供应商支付一定额度的预付定金, 以保证供货率维持在一个比较稳定的水平。这种合作方式, 降低了企业风险, 对于解决产能不定的报童问题提供了一种较新的思路。

(5) 存在次品率

传统报童模型中, 假定商品的合格率是 100%。企业向上游供应商订购的商品中, 不存在次品。然而在现实当中, 供应商所提供的商品中, 难免会有一些次品。Shih^[9] 在研究存在次品率的报童问题的过程中, 假定企业可以将次品退还给供应商, 并且次品率是属于已知分布参数下的未知变量。Shih 根据他所建立的模型推导出了成本函数, 并证明了成本函数的凸性, 即无论需求和次品率的分布如何, 总是存在最优解使得成本最低。

(6) 需求的信息的缺失

需求信息缺失, 意味着在传统报童模型中, 需求分布已知的假设不再成立。面对一个未知的分布, 许多学者着手研究供应链的鲁棒性, 即当出现较为异常的需求分布时, 如何使得企业获得相对较高的利润。Scarf^[10] 在需求未知的情况下, 假定已知需求分布的均值和方差, 求得了最大利润对应的最优订货量, 并且保证了最优解的闭合性。Zizhuo Wang, Peter W. Glynn 与 Yinyu Ye^[11] 引进了一种解决库存管理中报童问题的新方法, 即似然鲁棒最优解法 (Likelihood Robust Optimization, LRO), 该文对于历史数据进行挖掘分析, 得出可行的分布集合。在对基于贝叶斯估计和经验估计的基础上进行可能性约束条件的研究后, 作者发现这种方法是可驾驭的并且是统计无误差的。

(7) 多商品情况下报童问题

传统报童问题假定企业的订货量可以无限大, 也就是说企业拥有无限的资金。而在现

实中,企业的获得销售收入往往发生在订货之后。在订货时,企业会受到自身的资金限制。多商品情况下报童问题就是来研究当存在资金限制时,企业如何能够在保证资金正常运作的前提下,获得尽可能多的利润。Hadley 和 Whitin^[12]在研究这一问题时,提出了拉格朗日算子法。利用拉格朗日算子,将报童模型中的约束条件合并到目标函数当中,以达到消除约束条件的作用。在此之后,Lau H 和 Lau A^[13]研究发现拉格朗日算子法只能应用到一部分的需求分布中,他们进一步研究了对于多商品,多资金约束条件下的报童问题。

(8) 多级供应链系统的报童问题

多级供应链系统的报童模型是指,企业在建立模型时,考虑商品的供应、生产、分销等整个供应链系统。对于多级供应链系统,影响企业利润的因素很多,包括销售收入、制造成本、库存持有成本、运输成本等等。Gerchak 与 Henig^[14]以商品组成部分的存量为着手点,研究了对于一家生产型企业,建立了单周期多级供应链报童模型,并确定了利润最大的商品每个组成部分的最优订货量与存量。

除了以上八类报童问题以外,对于报童问题的解法,学者们同样有大量的研究。Liyanage 和 Shanthikumar^[15]运用运营统计学,对于传统报童问题给出了一种新的解法,得出了在未知需求分布下,将参数估计与利润最大化相结合,直接根据历史需求数据得出最优订货量。并且在他们所采用的运营统计学方法下,商品利润期望值相比传统方法有了较大的提升。Liyanage 和 Shanthikumar 所用到的思想和方法对于报童问题的实际应用有着深远的影响,本文在他的基础上,部分采用了他们的思想,对于多区域报童问题进行分析。

1.1.2 多区域集中供应报童问题研究现状

多区域集中供应报童问题所考虑的情况,是指在供应链中,企业面对多个需求点。相对于传统报童问题只考虑单一供应点,在这种条件下,企业有机会集中供应或分散供应以达成供应链的目标。自这一问题被提出以来,许多学者对其进行了研究,并加入各种不同的元素进行扩展。

(1) Gary D. Eppen (1979)^[2]首次对于多供应点中的报童问题做出分析。假设供应链系统拥有多个供应点,每个供应点的需求服从正态分布,持有成本和缺货成本均服从线性同分布。在不考虑仓库(供应点)的维护费用的情况下,企业需要选择集中供应或是分散供应。为了解决这个问题,Eppen 用数学推导,证明了每个需求点最大期望利润与需求标准差之间成线性关系,并得出以下的结论:①集中供应会降低持有和缺货成本的期望(唯一例外是在所有需求点之间相关系数均等于 1 的情况下集中和分散供应期望成本相等)。②采用集成供应可降低的成本,取决于每个需求点之间需求的相关系数,相关系数越小,集中供应所节约的成本就越大。③如果需求属于独立同分布,期望成本与需求点的数量的平方根成正比。

Eppen 在文中提出了多地点条件下集中或分散供应报童问题的基本模型,后来学者在研究这一问题时基本研究了它的模型。更重要的是,他发现的最优订货量所对应的期望利润与需求标准差的关系,这一结果经常被应用在之后的报童问题研究中。

(2) Alan Stulman (1987)^[16]对于单周期多地点条件下集中供应报童问题做了一定的分析。用系统服务水平的指标,即每一个仓库点缺货最大可能性,来替代原始报童问题中的缺货成本。订单处理遵循“先到,先满足”的原则,建立模型,并寻求在集中供应情况下最优订货量。文章总结了前人对于多点库存问题的研究,对于 Eppen 的模型做了进一步的改进,提出以服务水平的稳定性取代缺货成本作为参数 α 以进行最优库存的求解。经典报童问题理论基于两点假设,一是所有的需求可以被同时满足,这一假设忽略了时间因素,二是将整个供应链作为整体来考虑,不考虑每个供应点的服务水平的差异。在现实问题中,这两种假设都存在局限性。Stulman 改进了传统的模型,考虑了时间的因素,并将每一个仓库点的服务水平作为参数,得出最佳的集中供应库存持有量。

(3) Pao-Long Chang 和 Chin-Tsai Lin (1991)^[17]利用不同的方法,进一步拓展了 Eppen 的结论,证明了在任何分布下,如果分布已知,那集中供应的总成本就要低于分散供应。于此同时,他们还加入了运输成本的因素,使得报童模型的设定更合理、更贴近实际。

(4) Miao-Sheng Chen 和 Chen-Tsai Lin (1990)^[18]着重解决单周期单一商品的多点库存模型优化。对于拥有一个集成的供应链系统,即有一个中央配送中心以“先到,先满足”的方式服务数个需求点。库存水平受限于每一个供应点缺货的最大可能性。基于以上假设,Stulman (1987)^[16]认为相比分散供应链系统,拥有集中配送中心的供应链系统可以维持较少的库存。然而该文的作者举出了反例,来证明在实际问题当中,在某些模型参数下,集中配送中心的供应链系统可能反而会有更大的库存量。从而进一步探索模型参数与集成供应链优化关系。

第二章 已知分布参数多区域报童问题基本模型及分析

这一部分我们主要研究多区域报童问题在需求分布已知情况下，分散供应与集中供应最优订货量的确定，以及比较两者最大的期望利润。

本章分为三个部分，第一部分为已知分布参数下多区域报童问题的描述。第二部分介绍基本模型，包括参数设定，变量定义等。第三部分分别介绍在独立同分布以及独立非同参数分布情况下，分散供应或集中供应的优劣，以及比较两者最大的期望利润。

2.1 问题描述

2.1.1 模型背景

假设某国有一家经销商企业 A，其经营的建材业务覆盖全国。为了便于管理，企业将该国按照地理位置与人口分布等因素分成 m 个区域，记为 $L_1, L_2, \dots, L_m$ ，并于每个区域单独设立分管点，并于 L_0 处设有公司总部。

在经营业务的过程中，A 企业注重商品市场需求的统计，得知了每个区域 L_i 的商品需求服从参数为 θ_i 。在下一个销售周期前，A 企业需要决定向上游供应商的订货量。在该销售周期结束后，销售剩余的存货会被全部处理掉。假定 A 公司销售的商品成本和售价在全国范围内一致，同时，本模型中不考虑商品残余价值和缺货成本。

2.1.2 企业面临的问题

随着 A 企业经营管理不断革新，企业现在面临着两种供应战略之间的选择，即分散供应或者是集中供应，对于两种供应战略的阐述如下：

分散供应，是指企业在每个区域 L_i 均设立仓库，由每个区域的决策者独立选择订货量，并且各区域的分管点能且只能负责满足本块区域的需求。在需求数据方面，假设各区域之间信息共享，每个区域 L_i 的决策者了解所有区域的需求分布。

集中供应，是指 A 公司在全国只设立 L_0 一个仓库，所有 m 个区域内的需求统一由该仓库内的库存满足。在需求数据方面，假设 L_0 的决策者了解所有 m 个区域的需求分布情况。假定本模型中不考虑前置时间（Lead time），即忽略了集中供应与分散供应的地域差异。

2.1.3 模型目标

本模型的建立致力于解决 A 企业所面临的供应方式的选择问题。为达成这一目的，本章将从公式推理的角度来研究采用分散供应或集中供应对于商品总期望利润的影响。

2.2 已知需求分布下多区域报童问题基本模型

为了更好地研究未知分布参数下多区域报童问题基本模型，我们假设已知需求分布，比较观测集中供应与分散供应对于利润的影响。

设定参数：

S	每单位产品价格
C	每单位产品成本
L_i	第 i 个需求点, $i = 1, 2, \dots, m$

L_0	集中供应下供应点
T_{n+1}	下一个销售周期

定义变量:

x_i	L_i 区域中 T_{n+1} 产品需求, x_i 相互独立
x_0	T_{n+1} 下所有区域产品需求总和
Q_i	L_i 区域中在下一个销售周期之前的订货量
Q_0	集中供应下下一个销售周期之前的订货量

定义分布:

$f(x_i) = \frac{1}{\theta_i} e^{-\frac{x_i}{\theta_i}}$	x_i 的概率密度函数
$F(x_i) = 1 - e^{-\frac{x_i}{\theta_i}}$	x_i 的概率累计函数
$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$	x_i 的联合密度函数

传统多地点条件下报童模型在设定参数时往往会考虑商品的缺货成本以及残余价值。本文在保证结论不受较大影响的情况下, 为了简化计算过程, 忽略了这两个参数。
根据定义, 可知企业商品利润:

$$\pi(Q_i) = \begin{cases} sx_i - cQ_i, & \text{当 } x_i \leq Q_i \\ (s-c)Q_i, & \text{当 } x > Q \end{cases} \quad (2-1)$$

$$= (s-c)x_i - [(s-c)(x_i - Q_i)^+ + c(Q_i - x_i)^+]$$

经过整理, 得出:

$$E[\pi(Q_i)] = (s-c)\theta_i - (s-c) \int_{Q_i}^{\infty} (x_i - Q_i) f(x_i) dx_i - c \int_0^{Q_i} (Q_i - x_i) f(x_i) dx \quad (2-2)$$

令:

$$\frac{\partial E[\pi(Q_i)]}{\partial Q_i} = 0$$

得出, 在分散供应下, L_i 的最优订货量:

$$Q_i^* = F^{-1}\left(\frac{s-c}{s}\right) = \theta_i \ln\left(\frac{s}{c}\right) \quad (2-3)$$

由此可以得出, 在 L_i 下, 当订货量为 Q^* 时,

$$\pi(Q_i^*) = s \min\{\theta_i \ln(\frac{S}{c}), x_i\} - c\theta_i \ln(\frac{S}{c}) \quad (2-4)$$

因此，在分散供应下，订货量总和为：

$$\sum_{i=1}^m Q_i^* = \sum_{i=1}^m \theta_i \ln(\frac{S}{c}) \quad (2-5)$$

总利润为：

$$\pi_{TD} = \sum_{i=1}^m \pi(Q_i^*) = \sum_{i=1}^m s \min\{\theta_i \ln(\frac{S}{c}), x_i\} - c\theta_i \ln(\frac{S}{c}) \quad (2-6)$$

在集中供应下，所有区域的商品需求均由 L_0 满足，即：

$$x_0 = x_1 + x_2 + \dots + x_m,$$

其中：

$$x_i \sim \text{Exp}(\frac{1}{\theta_i})$$

同理：

$$Q_0 = F_0^{-1}(\frac{S-c}{s}), \quad \text{其中 } x_0 \sim F_0(x) \quad (2-7)$$

在集中供应下，

$$\pi_{TC} = s \min\{F_0^{-1}(\frac{S-c}{s}), x_0\} - cF_0^{-1}(\frac{S-c}{s}) \quad (2-8)$$

2.3 已知需求分布下集中供应与分散供应对期望利润的比较

在求得商品最优的订货量之后，我们需要观测最优订货量下，集中供应与分散供应对期望利润的影响。Pao-Long Chang 和 Chin-Tsai Lin^[17]对这一问题做出过研究，并且比较期望成本函数证明了对于多地点报童问题，集中供应的期望利润高于分散供应。本文在他的基础上，从同参数分布与非同参数分布两方面比较商品的期望利润函数，证明了在需求分布独立并且服从指数分布时，这一结论仍然成立。

下面是证明过程。

假设 L_i 下的需求 x_i 服从独立并且参数为 θ_i 的非同参数分布。

首先在 2.1 分布定义的基础上，增加：

$$h(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2-9)$$

$$p(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

观测发现, $h(t)$ 与 $p(t)$ 均为非减函数。

设定分散供应下 L_i 成本函数:

$$L_D(Q_i) = \int_{Q_i}^{\infty} (s-c)(x_i - Q_i) f(x_i) dx_i + \int_0^{Q_i} c(Q_i - x_i) f(x_i) dx_i \quad (2-10)$$

其中 Q_i 是在分散供应时, L_i 区域下的订货量。

设定集中供应下所有区域的成本函数

$$L_C(Q_0) = \int_{Q_0}^{\infty} (s-c)(x_0 - Q_0) f(x_0) dx_0 + \int_0^{Q_0} c(Q_0 - x_0) f(x_0) dx_0 \quad (2-11)$$

其中 Q_i 是在集中供应时, 所有区域的总订货量。 x_0 为所有区域需求总和, 即:

$$x_0 = x_1 + x_2 + \dots + x_m \quad (2-12)$$

易得:

$$\begin{aligned} E[\pi(Q_i)] &= (s-c)\theta_i - (s-c) \int_{Q_i}^{\infty} (x_i - Q_i) f(x_i) dx_i - c \int_0^{Q_i} (Q_i - x_i) f(x_i) dx_i \\ &= (s-c)\theta_i - L_D(Q_i) \end{aligned} \quad (2-13)$$

在分散供应下, 商品利润总和:

$$E_{TD} = \sum_{i=1}^m E[\pi(Q_i)] = (s-c) \sum_{i=1}^m \theta_i - \sum_{i=1}^m L_D(Q_i) \quad (2-14)$$

由于 x_i 相互独立, 因此:

$$E(x_0) = E(x_1) + E(x_2) + \dots + E(x_m) = \sum_{i=1}^m \theta_i \quad (2-15)$$

在集中供应下, 商品利润总和:

$$\begin{aligned} E_{TC} &= E[\pi(Q_0)] = (s-c)E(x_0) - L_C(Q_0) \\ &= (s-c) \sum_{i=1}^m \theta_i - L_C(Q_0) \end{aligned} \quad (2-16)$$

由 $h(t), p(t)$ 函数可知:

$$\begin{aligned} L_D(Q_i) &= \int_0^{\infty} (s-c)p(x_i - Q_i) \frac{1}{\theta_i} e^{-\frac{x_i}{\theta_i}} dx_i + \int_0^{\infty} ch(Q_i - x_i) \frac{1}{\theta_i} e^{-\frac{x_i}{\theta_i}} dx_i \\ &= \int_0^{\infty} [(s-c)p(x_i - Q_i) + ch(Q_i - x_i)] \frac{1}{\theta_i} e^{-\frac{x_i}{\theta_i}} dx_i \end{aligned} \quad (2-17)$$

又因为:

$$\int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta_1 \dots \theta_{i-1} \theta_{i+1} \dots \theta_m} \cdot e^{-[(\frac{x_1}{\theta_1}) + \dots + (\frac{x_{i-1}}{\theta_{i-1}}) + (\frac{x_{i+1}}{\theta_{i+1}}) + \dots + (\frac{x_m}{\theta_m})]} dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_m = 1 \quad (2-18)$$

因此:

$$L_D(Q_i) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty [(s-c)p(x_i - Q_i) + ch(Q_i - x_i)] \frac{1}{\theta_1 \dots \theta_m} e^{-\sum_{i=1}^m (\frac{x_i}{\theta_i})} dx_1 \dots dx_m \quad (2-19)$$

得到分散供应下，所有区域的成本总函数：

$$\sum_{i=1}^m L_D(Q_i) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty [(s-c) \sum_{i=1}^m p(x_i - Q_i) + c \sum_{i=1}^m h(Q_i - x_i)] \frac{1}{\theta_1 \dots \theta_m} e^{-\sum_{i=1}^m (\frac{x_i}{\theta_i})} dx_1 \dots dx_m \quad (2-20)$$

对于集中供应下的成本函数：

$$\begin{aligned} L_C(Q_0) &= \int_{Q_0}^\infty (s-c)(x_0 - Q_0) f(x_0) dx_0 + \int_0^{Q_0} c(Q_0 - x_0) f(x_0) dx_0 \\ &= \int_0^\infty [(s-c)p(x_0 - Q_0) + ch(Q_0 - x_0)] f(x_0) dx_0 \end{aligned} \quad (2-21)$$

由于：

$$f(x_0) = f(x_1 + x_2 + \dots + x_m) \quad (2-22)$$

因此：

$$\begin{aligned} L_C(Q_0) &= \int_0^\infty [(s-c)p(\sum_{i=1}^m x_i - Q_0) + ch(Q_0 - \sum_{i=1}^m x_i)] f(x_1 + \dots + x_m) d(x_1 + \dots + x_m) \\ &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty [(s-c)p(\sum_{i=1}^m x_i - Q_0) + ch(Q_0 - \sum_{i=1}^m x_i)] f(x_1) \dots f(x_m) dx_1 \dots dx_m \\ &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty [(s-c)p(\sum_{i=1}^m x_i - Q_0) + ch(Q_0 - \sum_{i=1}^m x_i)] \frac{1}{\theta_1 \dots \theta_m} e^{-\sum_{i=1}^m (\frac{x_i}{\theta_i})} dx_1 \dots dx_m \end{aligned} \quad (2-23)$$

定义 Q_i^* 为分散供应下使 L_i 商品期望利润最大的订货量，即 L_i 最优订货量。

$$\begin{aligned} E[\pi(Q_i^*)] &= \max E[\pi(Q_i)] \\ &= \max [(s-c)\theta_i - L_D(Q_i)] \\ &= (s-c)\theta_i - \min L_D(Q_i) \end{aligned} \quad (2-24)$$

分散供应下，所有区域最优订货量下的期望利润总和：

$$\max E_{TD} = (s-c) \sum_{i=1}^m \theta_i - \sum_{i=1}^m L_D(Q_i^*) \quad (2-25)$$

假设，集合 $J \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$

当且仅当 $i \in J$ 时， $x_i - Q_i^* \geq 0$ ，此时 $p(x_i - Q_i^*) = x_i - Q_i^*$ ， $h(Q_i^* - x_i) = 0$

易得，当 $i \notin J$ 时， $x_i - Q_i^* < 0$ ，此时 $p(x_i - Q_i^*) = 0$ ， $h(Q_i^* - x_i) = Q_i^* - x_i$

因此：

$$\sum_{i=1}^m L_D(Q_i^*) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty [(s-c) \sum_{i \in J} p(x_i - Q_i^*) + c \sum_{i \notin J} h(Q_i^* - x_i)] \frac{1}{\theta_1 \dots \theta_m} e^{-\sum_{i=1}^m (\frac{x_i}{\theta_i})} dx_1 \dots dx_m \quad (2-26)$$

定义 Q_0^* 为集中供应下是所有区域商品期望利润总和最大的订货量，即最优订货量。

$$\begin{aligned} \max E_{TC} &= \max E[\pi(Q_0)] \\ &= (s-c) \sum_{i=1}^m \theta_i - \min L_C(Q_0) \end{aligned} \quad (2-27)$$

由 Q_0^* 定义可知，当 $Q_0 = \sum_{i=1}^m Q_i^*$ 时，

$$\max E_{TC} \geq (s-c) \sum_{i=1}^m \theta_i - L_C(\sum_{i=1}^m Q_i^*) \quad (2-28)$$

因此有：

$$\begin{aligned} L_C(\sum_{i=1}^m Q_i^*) &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty [(s-c) p(\sum_{i=1}^m x_i - \sum_{i=1}^m Q_i^*) + ch(\sum_{i=1}^m Q_i^* - \sum_{i=1}^m x_i)] \frac{1}{\theta_1 \dots \theta_m} e^{-\sum_{i=1}^m (\frac{x_i}{\theta_i})} dx_1 \dots dx_m \\ &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty [(s-c) p(\sum_{i=1}^m (x_i - Q_i^*)) + ch(\sum_{i=1}^m (Q_i^* - x_i))] \frac{1}{\theta_1 \dots \theta_m} e^{-\sum_{i=1}^m (\frac{x_i}{\theta_i})} dx_1 \dots dx_m \end{aligned} \quad (2-29)$$

由于 $h(t), p(t)$ 均为非减函数，

$$\begin{aligned} L_C(\sum_{i=1}^m Q_i^*) &\leq \int_0^\infty \dots \int_0^\infty [(s-c) p(\sum_{i \in J} (x_i - Q_i^*)) + ch(\sum_{i \notin J} (Q_i^* - x_i))] \frac{1}{\theta_1 \dots \theta_m} e^{-\sum_{i=1}^m (\frac{x_i}{\theta_i})} dx_1 \dots dx_m \\ &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty [(s-c) \sum_{i \in J} p(x_i - Q_i^*) + c \sum_{i \notin J} h(Q_i^* - x_i)] \frac{1}{\theta_1 \dots \theta_m} e^{-\sum_{i=1}^m (\frac{x_i}{\theta_i})} dx_1 \dots dx_m \\ &= \sum_{i=1}^m L_D(Q_i^*) \end{aligned} \quad (2-29)$$

因此有：

$$\begin{aligned} \max E_{TC} &\geq (s-c) \sum_{i=1}^m \theta_i - L_C(\sum_{i=1}^m Q_i^*) \\ &\geq (s-c) \sum_{i=1}^m \theta_i - \sum_{i=1}^m L_D(Q_i^*) \\ &= \max E_{TD} \end{aligned} \quad (2-30)$$

因此在独立非同参数分布下，最优订货量下的集中供应期望利润大于分散供应期望利润。

在需求服从参数为 θ 的独立同分布情况下，即：

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_i = \theta,$$

则有：

$$L_D(Q_i) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty [(s-c)p(x_i - Q_i) + ch(Q_i - x_i)] \frac{1}{\theta^m} e^{-\frac{\sum_{i=1}^m x_i}{\theta}} dx_1 \dots dx_m \quad (2-31)$$

$$L_C(Q_0) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty [(s-c)p(\sum_{i=1}^m x_i - Q_0) + ch(Q_0 - \sum_{i=1}^m x_i)] \frac{1}{\theta^m} e^{-\frac{\sum_{i=1}^m x_i}{\theta}} dx_1 \dots dx_m \quad (2-32)$$

证明过程与独立非同参数分布相同。

即：在需求服从独立同分布下，最优订货量下的集中供应期望利润大于分散供应期望利润。

尽管本文采用 Pao-Long Chang 和 Chin-Tsai Lin^[17]的方法，证明了对于多区域报童问题，当需求服从独立同参数分布与独立非同参数分布时，集中供应的最大期望利润大于分散供应的最大期望利润，然而这种方法依然存在着一一定的局限性：

第一，Chen 和 Lin 使用了缩放的方法，证明了 $\max E_{TC} \geq \max E_{TD}$ 这一定性的结论。

但是通过这种方法，我们并不能得知在一定条件下，集中供应最大期望利润究竟比分散供应最大期望利润高多少。并且，即使我们已经证明了集中供应的期望利润大于分散供应的期望利润，由于需求具有随机性和偶然性，我们也无法得知，集中供应的利润是否始终大于分散供应的利润，集中供应的利润有多大可能性高于分散供应。这些都是我们通过纯粹的公式推理和计算很难得出的结论。

第二，Chen 和 Lin 所采用的方法，是假设需求分布已知。而在实际情况中，需求分布往往是未知的，因为商品的生命周期是有限的，企业只能通过有限的需求数据，采用不同的方法，来决定最优订货量，并且得出商品利润值。在这种情况下，假设需求分布已知就失去了实际意义。

因此，本文将着重研究在需求分布未知的情况下，企业应当如何选择供应方式以及订货量的决定方式。

第三章 未知分布参数下多区域报童问题数据模拟与分析

这一部分我们主要研究多区域报童问题在需求分布未知情况下,企业供应战略的选择与最优订货量的确定。

本章同样分为三个部分,第一部分介绍未知分布参数下多区域报童问题的背景,包括参数设定,变量、分布定义等。第二部分介绍未知分布参数下,当需求服从独立同分布时,多区域报童问题的模型建立,第三部分主要介绍基于给定参数下的报童问题的数据模拟与仿真,并且根据不同的企业策略组合,设定一系列指标,观测不同策略在模型中的表现。

3.1 未知分布参数下多区域报童问题的背景

3.1.1 模型背景描述

在未知分布参数下多区域报童模型背景与已知需求分布下类似,所不同的是,A企业无法得知 L_i 的需求分布。这一差别导致A企业在经营业务的过程中,必须统计每个区域商品的历史需求数据,对于各区域每个历史销售周期 $T_1, T_2 \cdots T_n$,A企业都需要将其市场需求记录下来,记为 $X_{i,j}$,其中 $i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n$ 。在下一个销售周期前,A企业要从历史需求数据中来决定向上游供应商的订货量。

3.1.2 两种订货量决定方法

未知需求分布下,企业同样面临着供应战略的选择问题,即选择分散供应或是集中供应。所不同的是,除此之外,企业还需要寻找确定订货量的最优方法。

传统的多区域报童模型中,由于假设分布是已知的,因此对于一个区域的最优订货量可以根据 $Q^* = F^{-1}((s-c)/s)$ 来得出。因此,只要商品成本和售价等参数是固定的,最优订货量 Q^* 是可以被唯一确定的。然而在未知分布参数下的多区域报童模型中,由于需求分布未知,最优订货量无法被唯一确定,因此找到确定最优订货量的方法十分重要。

在未知分布参数下,要决定一个决策变量(Q^*),常用的方法有参数估计法与决策变量法。

参数估计法,是指企业假定商品需求服从某一类型的分布,并利用历史需求数据估计假定分布的参数,从而将未知分布参数转化为参数估计下的分布。

决策变量法,是指企业假定商品需求服从某一类型的分布,然而与参数估计法不同的是,企业采用决策变量法时,跳过了参数估计这一步骤,而直接从历史需求数据中估计最优的决策变量(订货量)。

因此对于A企业来说,在假设分布未知的情况下,就面临着两大问题,一是分散供应与集中供应的战略选择,二是参数估计法与决策变量法的订货量决定方法的选择。

在后文中,为了便于描述,我们将企业供应战略的选择与订货量决定方法的选择统称为企业的策略选择。并且,当企业所做出的选择是最有效的时候,我们就将企业的选择作为最优策略。

3.1.3 未知分布参数下多区域报童模型目标

本模型的建立致力于解决 A 企业所面临的两大问题，即供应方式的选择与订货量决定方法的选择。为达成其目的，首先需要找到合适的标准来衡量解决问题的方法的有效性。其次，本文通过数据模拟与仿真的方法来研究采用①分散供应或集中供应。②参数估计法或决策变量法对于商品利润的影响。

3.2 需求分布未知且独立同分布下多区域报童问题基本模型

为了简化未知需求分布下的订货量选择问题，我们假设在对于一些公司商品不同阶段历史销售数据进行分析后，我们发现商品需求接近指数分布，因此在模型中，我们假设每个区域的商品需求量独立同分布（真实参数为 θ ），且服从未知参数的指数分布。

3.2.1 模型定义

定义参数如下：

s	每单位产品价格
c	每单位产品成本
m	需求区域数量
n	产品历史销售周期数量
θ	每个区域产品需求的真实分布参数
L_i	分散供应下第 i 个供应点, $i = 1, 2, \dots, m$
L_0	集中供应下供应点
T_j	历史数据中第 j 个周期, $j = 1, 2, \dots, n$
T_{n+1}	下一个销售周期

定义变量：

$x_{i,j}$	分散供应下在 L_i, T_j 观测到的需求量
$x_{0,j}$	集中供应下在 T_j 观测到的所有需求量总和
Q_i	L_i 区域中在下一个销售周期之前的订货量
Q_0	集中供应下下一个销售周期之前的订货量

定义分布，假定需求属于未知参数的指数分布，即：

$$f(x_{i,j}) = \theta^{-1} e^{-\frac{x_{i,j}}{\theta}} \quad x_i \text{ 的概率密度函数}$$

$$F(x_{i,j}) = 1 - e^{-\frac{x_{i,j}}{\theta}} \quad x_i \text{ 的概率累计函数}$$

在未知分布参数报童模型中，我们同样不考虑商品残余价值以及缺货成本。

3.2.2 基本公式推理

在未知需求分布的情况下，我们假设需求分布服从 θ 的指数分布。在分散供应下，由 2.2 我们可以得出 L_i 针对 T_{n+1} 的最优订货量：

$$Q_i^* = F^{-1}\left(\frac{s-c}{s}\right) = \theta \ln\left(\frac{s}{c}\right) \quad (3-1)$$

区域 L_i 的利润为:

$$\pi(Q_i^*) = s \min\left\{\theta \ln\left(\frac{s}{c}\right), x_i\right\} - c\theta \ln\left(\frac{s}{c}\right) \quad (3-2)$$

在分散供应下, 总利润为:

$$\pi_{TD} = \sum_{i=1}^m \pi(Q_i^*) = \sum_{i=1}^m s \min\left\{\theta \ln\left(\frac{s}{c}\right), x_i\right\} - c\theta \ln\left(\frac{s}{c}\right) \quad (3-3)$$

其中 θ 为指数分布的未知参数

对于集中供应, 有:

$$x_{0,j} = x_{1,j} + x_{2,j} + \cdots + x_{m,j}, \quad x_i \sim \text{Exp}(\theta^{-1}) \quad (3-4)$$

而对于 m 个独立参数分布的指数分布, 其累积和服从 Gamma 分布。

因此, $x_0 \sim \text{Gamma}(m, \theta^{-1})$ 。

$$\text{于是, } Q_0^* = \text{Gamma}^{-1}\left(\frac{s-c}{s}, m, \theta\right), \quad (3-5)$$

$$\pi_{TC} = \pi(Q_0^*) = s \min\left\{\text{Gamma}^{-1}\left(\frac{s-c}{s}, m, \theta\right), x_0\right\} - c\text{Gamma}^{-1}\left(\frac{s-c}{s}, m, \theta\right) \quad (3-6)$$

同样, θ 为未知参数。

3.3 给定参数下的数据模拟

通过公式 (3-3) 与 (3-5), 我们发现, 无论在分散供应或是集中供应下, 商品利润总和 π 总是关于 m, n, s, c, θ 的函数, 但在需求独立同分布且分布参数未知的条件下, 我们只能通过 $x_{i,j}$ 或者 $x_{0,j}$, 即对于具体的历史销售需求数据, 运用一系列公式计算方法, 来决定最优订货量。

在这种情况下, 我们很难用公式推理直接得出公司应该采用分散供应或集中供应; 参数估计法或决策变量法的结论, 而是需要采用数据模拟与仿真的方法, 寻找到最合理的答案, 使得公司商品的利润最大化。

首先假定企业决策者已知一组参数:

$$s=3, c=1, m=2, n=1 \quad (37)$$

即: 商品售价为 3, 成本为 1, 区域数量为 2, 历史周期数量为 1。在本节中, 这组参数不会改变。

要进行数据模拟, 我们需要系统随机产生 $2 \times 1 = 2$ 的历史需求数据。我们假定 $\theta=3$, 也就是说所产生的 50 个数据服从 $\theta=3$ 的指数分布。然而因为假设分布未知, 所以企业的决策者并不知道 θ 的具体值。

在所有参数均已给出之后, 我们已经具备了数据模拟的基本条件。对于未知分布参数下多区域报童问题, 进行第一次模拟, 每次模拟共分为四个步骤。

3.3.1 单次模拟步骤

步骤一：产生需求数据

为了达到数据模拟的随机性，我们假定：

$$F(x_{i,j}, \theta) = \varepsilon,$$

其中, $F(\cdot)$ 为 $x_{i,j}$ 的累计分布函数; ε 为大于等于 0, 小于 1 的服从均匀分布的随机数。

整理可得：

$$x_{i,j} = -\theta \ln(1 - \varepsilon), \quad i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n \quad (3-8)$$

由此公式，我们让系统产生 2 个历史需求数据。

在数据模拟中，我们需要通过系统产生 T_{n+1} 的将来发生的需求，来检验企业策略选择的有效性。因此，我们还需要通过上面的公式让系统产生 $m=2$ 个 T_{n+1} 的需求数据。并且，企业决策者在做出战略决策之前，并不知晓这些历史数据。
通过 Excel，产生模拟数据如下：

表3-1 $m=2, n=1$ 下单次数据模拟

	T_n	T_{n+1}
$X_{i,j}$	T1	T2
L1	0.88	3.87
L2	3.25	1.44

其中 T2 即下一销售周期， $x_{i,2}$ 为 L_i 区域下一销售周期的市场需求。

步骤二：假设分布已知，计算最优订货量下分散供应与集中供应的利润值。

在分散供应下，由公式 (3-1) 可得：

$$Q_i^* = F^{inv}\left(\frac{s-c}{s}, \theta\right) = 3 \ln 3 = 3.30 \quad (3-9)$$

$$\pi_{D,i}(\theta, x_{n+1}) = s \min\{Q_i^*, x_{i,n+1}\} - cQ^* = 3 * \min\{3.30, x_{i,2}\} - 3.30 \quad (3-10)$$

将第一次模拟产生的数据代入，得到如果需求分布已知，分散供应下的商品总利润为：

$$\pi_{1-KN-TD} = \sum_{i=1}^m \pi(Q_i^*) = 7.62 \quad (3-11)$$

在集中供应下，由公式 (3-5) 可得：

$$Q_0^* = Gamma^{-1}\left(\frac{s-c}{s}, m, \theta\right) = 6.87 \quad (3-12)$$

将第一次模拟产生的数据代入，得到如果需求分布已知，集中供应下的商品总利润为：

$$\pi_{1-KN-TC} = \pi(Q_0^*) = s \min\{\text{Gamma}^{-1}(\frac{s-c}{s}, m, \theta), x_0\} - c \text{Gamma}^{-1}(\frac{s-c}{s}, m, \theta) = 9.06 \quad (3-13)$$

为了方便描述，在后文中，我们将 $\pi_{1-KN-TD}$ 与 $\pi_{1-KN-TC}$ 分别作为在第 1 次数据模拟下，分散供应下与集中供应下的理想利润值（或理想水平）。在未知分布参数的情况下，需要通过这两个理想利润值，来衡量不同订货量估计方法的有效性。

步骤三：用参数估计法估计未知分布参数的参数，并分别计算在最优订货量下，集中供应与分散供应的利润

在未知分布参数的情况下，我们需要通过历史需求数据来估计 θ 。由于我们假设需求服从参数为 θ 的指数分布，而在指数分布下，样本的期望值 $E(x) = \theta$ ，因此，对于 θ ，我们采用无偏估计量： $\overline{x_{i,j}}$ ，

$$\text{即：}\hat{\theta} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} \quad (3-13)$$

将模拟产生的历史需求数据代入，得到：

$$\hat{\theta} = 2.07$$

因此，在估计得到的参数下，分散供应的最优订货量：

$$Q_{PE-i}^* = F^{inv}(\frac{s-c}{s}, \hat{\theta}) = \hat{\theta} \ln(\frac{s}{c}) \quad (3-14)$$

集中供应的最优订货量：

$$Q_{PE-0}^* = \text{Gamma}^{inv}(\frac{s-c}{s}, m, \hat{\theta}) \quad (3-15)$$

将 Q_{PE-i}^* 与 Q_{PE-0}^* 的值代入分散供应与集中供应的利润公式中：

$\pi_{1-PE-D} = 6.59$ ，其中 π_{1-PE-D} 为采用参数估计法，在第 1 次模拟后，计算最优订货量之后得到的商品利润。

$\pi_{1-PE-C} = 9.46$ ，其中 π_{1-PE-C} 为采用参数估计法，在第 1 次模拟后，计算最优订货量之后得到的商品利润。

步骤四：用决策变量法估计未知分布参数的参数，并分别计算在最优订货量下，集中供应与分散供应的利润

相对于参数估计法，决策变量法不对未知分布参数的参数进行估计，而是直接从模拟数据中估计最优的决策变量。通过观察，我们发现：

对于分散供应，采用：

$$Q_{DV-i}^* = \overline{x_{i,j}} \left(\left(\frac{s}{c} \right)^{\frac{1}{nm+1}} - 1 \right) nm \quad (3-16)$$

能够较为贴合已知分布参数下的最优订货量,同时,当 $mn \rightarrow \infty$ 时, $Q_{DV-i}^* \rightarrow \hat{\theta} \ln(s/c) = Q_{PE-i}^*$,

因此,我们对于决策变量法下,订货量 Q 的估计同样是无偏的。

对于集中供应,我们采用:

$$Q_{DV-0}^* = \text{Gamma}^{-1} \left(\frac{s-c}{s}, m, \frac{\overline{x_{i,j}} \left(\left(\frac{s}{c} \right)^{\frac{1}{nm+1}} - 1 \right) nm}{\ln(s/c)} \right) \quad (3-17)$$

作为订货量,同样我们发现,当 m 与 n 的乘积 $m*n$ 的数值趋向于无穷大时,即 $mn \rightarrow \infty$,

$$Q_{DV-0}^* \rightarrow \text{Gamma}^{-1} \left(\frac{s-c}{s}, m, \hat{\theta} \right) = Q_{PE-0}^* \quad (3-18)$$

因此,集中供应下订货量 Q 也是无偏的。

将分别将两种供应战略下的最优订货量代入到各自的利润函数中,得到:

$\pi_{1-DV-D} = 6.15$, 其中 π_{1-DV-D} 为采用决策变量法,在第一次模拟后,计算最优订货量之后得到的商品利润。

$\pi_{1-DV-C} = 7.63$, 其中 π_{1-DV-C} 为采用决策变量法,在第一次模拟后,计算最优订货量之后得到的商品利润。

由于历史需求数据是根据 $\theta = 3$ 的指数分布随机产生的,因此可能会产生较为异常的需求数据。只有在重复多次数据模拟之后,排除了随机需求数据的随机性,才能得出一个比较准确的结论。然而我们很难直接得出合理的数据模拟次数,模拟次数过多会影响效率,模拟次数过少又会增加随机性和偶然性,致使得出的结论无法令人信服。因此在下一节中,我们将通过实验的方法寻找合适的模拟次数。

3.3.2 模拟次数的确定

为得到合适的模拟次数,我们需要进行 5 组试验,在每组试验中,进行 n 次数据模拟,通过尝试使用不同的 n ,观测每组试验中

第 1 类数据:分散供应下采用参数估计法的平均利润 $\bar{\pi}_{n-PE-D-t}$

第 2 类数据:集中供应下采用参数估计法的平均利润 $\bar{\pi}_{n-PE-C-t}$

第 3 类数据:分散供应下采用的平均利润 $\bar{\pi}_{n-DV-D-t}$

第 4 类数据:集中供应下采用决策变量法的平均利润 $\bar{\pi}_{n-DV-C-t}$

第 5 类数据:分散供应下已知分布参数(理想水平)的平均利润 $\bar{\pi}_{n-KN-D-t}$

第 6 类数据:集中供应下已知分布参数(理想水平)的平均利润 $\bar{\pi}_{n-KN-C-t}$

其中, t 表示在第 t 组模拟下,得到的平均利润值。

对于这 6 类数据,计算 5 组试验中,每一类数据中各组之间的最大差值与 5 组模拟下平均利润值的比例,公式如下:

$$p_{n,m} = \frac{\max(\bar{\pi}_{n,m,t}) - \min(\bar{\pi}_{n,m,t})}{\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \bar{\pi}_{n,m,t}} \times 100\% \quad (3-19)$$

其中, n 为设定的模拟次数, $m=1,2,\dots,6$, 分别表示上文中提到的各类平均利润数据。

$p_{n,m}$ 表示在 n 次模拟下, 第 m 类数据的各组数据之间最大差值与各组数据间的平均利润值的比例。 $\bar{\pi}_{n,m,t}$ 表示在 n 次模拟下, 第 m 类数据的第 t 组模拟结果, 即第 t 组的平均利润值。

同时为了保证统计数据足够可信, 我们设定 5 组试验中, 各组数据中 p 值不得高于 1%。

首先我们将模拟次数 n 设定为 100 次, 进行 5 组模拟, 统计在各战略下的平均利润值, 并计算各组数据中的 p 值。

表3-2 100次数据模拟 p 值

不同策略组合下的平均利润	p 值 (%)
参数-分散	15.60
参数-集中	8.60
决策-分散	11.40
决策-集中	6.61
真实-分散	0.21
真实-集中	0.46

表中的数据与 1% 的目标偏差较大, 显然每组试验仅仅模拟 100 次是不够的。

令 $n=1000$, 同样进行 5 组模拟, 得到结果如下:

表3-3 1000次数据模拟 p 值

不同策略组合下的平均利润	p 值 (%)
参数-分散	3.71
参数-集中	0.93
决策-分散	3.34
决策-集中	2.03
真实-分散	3.67
真实-集中	0.78

可见表中仍然有 4 个指标超过 1%, 无法达到目标水平, 进一步提升 n 的值。

令 $n=10000$, 进行 5 组模拟, 得到结果如下:

表3-4 10000次数据模拟 p 值

不同策略组合下的平均利润	p 值 (%)
参数-分散	0.80
参数-集中	0.08
决策-分散	1.13
决策-集中	0.18
真实-分散	0.15
真实-集中	0.81

可见当 n 达到 10000 次时, 大多数指标均已达到目标水平, 仅有的未达到目标的数值也已经很接近 1%, 因此 10000 次实验已经能够较为真实地反应数据模拟结果。

尽管当 n 越大时, 统计结果越准确也越贴近真实, 然而从电脑计算一组模拟所花的时间的角度来看, 当 n 低于 100 时电脑几乎能够瞬间完成模拟和计算, 当 n 等于 1000 时, 电脑大约需要 10 秒中计算时间, 当 n 达到 10000 时, 每组模拟需要耗用电脑约 100 秒的计算时间。继续提升 n 的数量级, 将同样导致电脑计算时间的增加, 当 n 达到 100000 以上时, 进行 5 组实验大约需要 2 个小时左右的时间, 试验的效率就被大大降低了。因此我们认为, 10000 次模拟, 是能够兼顾准确度和效率的模拟次数。故而, 在之后的章节中, 设定模拟试

验次数为 10000 次。

3.3.3 同组参数下的 10000 次模拟

对于 3.3 中给定的参数组, $s=3, c=1, m=2, n=1$, 重复 3.3.1 中的步骤一到四, 进行 10000 次模拟, 统计每次数据模拟中得出的:

- (1) 在真实分布参数 $(1/\theta)$ 已知的情况下, 最优订货量对应的分散供应 (下表第 5 列) 与集中供应 (下表第 6 列) 的利润
- (2) 采用参数估计法, 最优订货量对应的分散供应 (下表第 2 列) 与集中供应 (下表第 3 列) 的利润
- (3) 采用决策变量法, 最优订货量对应的分散供应 (下表第 4 列) 与集中供应 (下表第 5 列) 的利润

统计结果 (表中第 2 至 7 列) 如下:

表 3-5 10000 次数据模拟

模拟次数	不同策略组合下利润总和					
	参数-分散	参数-集中	决策-分散	决策-集中	真实-分散	真实-集中
1	12.74	13.28	10.26	10.69	13.08	13.74
2	1.60	4.30	1.40	3.46	3.86	9.41
.....						
10000	5.28	5.79	4.48	4.66	4.29	4.02

3.4 同组参数下模拟结果的数据分析

对于得到的数据, 我们需要通过分析得出结论。分析分为两个块面, 第一个块面是帮助企业制定最适合的策略组合, 第二个块面是集中供应与分散供应的比较。

3.4.1 针对企业决策的数据分析

为了帮助企业制定最合适的策略组合, 我们需要通过一系列的指标来衡量各个策略。现设定分析指标如下:

- (1) 策略组合成为最优决策的频率

对于同一组给定参数下, 通过每一次模拟都可以根据需求数据计算出四种不同的策略组合 (参数-分散, 参数-集中, 决策-分散, 决策-集中) 的利润值。对于绝大多数追求利润的企业来说, 利润多少是企业决定采用某种策略组合最重要的指标。因此不妨定义每次模拟后, 利润最大的参数组合为最优参数组合, 并且统计在 10000 次模拟之后, 每种策略组合成为最优参数组合的频率。

- (2) 未知分布参数下的四种策略组合以及已知分布参数下的两种决策的利润平均值
- 利润平均值的计算公式为:

$$\bar{\pi} = \frac{\sum_{k=1}^{10000} \pi_k}{10000} \quad (3-20)$$

如上一节中所说, 在模拟次数达到 10000 次的情况下各策略组合的利润平均值, 此时根据大数定律, 均值已经非常接近利润期望值。因此, 根据每种策略组合的利润平均值我

们可以得知该策略组合的期望利润；同时也可以得知已知分布参数下的理想利润水平。

(3) 各策略组合下的利润变异系数

由利润平均值我们可以得知策略组合的期望利润，而对于利润的稳定性（变动程度）我们可以用变异系数来描述，公式如下：

$$CV = \frac{E\{[\pi_k - E(\pi_k)]^2\}}{E(\pi_k)}, k=1,2,\dots,10000 \quad (3-21)$$

企业的变异系数可以描述企业利润的波动，变异系数越高说明利润波动越大，因此企业的利润越不稳定。

(4) 各策略组合的左半变异系数

左半变异系数的公式为：

$$CV_L = \frac{E\{[\pi_k - E(\pi_k)]^2\}}{E(\pi_k)}, \text{其中 } \pi_k < E(\pi_k), k=1,2,\dots,10000 \quad (3-22)$$

变异系数用来描述企业利润的波动，即模拟所得的利润高于或低于平均利润，都会增加利润变异系数。而左半变异系数仅仅考虑低于平均利润的情况，左半变异系数越高，说明利润低于平均值的风险越大。这一指标的依据在于企业在现实经营中对于低于平均利润的情况更为敏感。而相比变异系数，对于大部分追求利润稳定的企业，左半变异系数有更大的参考价值。

(5) 各策略组合的亏损概率

亏损概率指的是企业采用某一策略组合下，模拟利润小于零的频率，其公式为：

$$p = \frac{\sum_{k=1}^{10000} t_k}{10000}, \text{其中 } t_k = \begin{cases} 1, & \text{当 } \pi_k < 0 \\ 0, & \text{当 } \pi_k \geq 0 \end{cases} \quad (3-23)$$

对于大部分企业来说，对于亏损的敏感程度很高，在现实经营中也会极力地防止亏损情况的发生，因此，在 10000 次模拟下，各个策略组合的亏损概率，是衡量策略组合有效性的一个非常重要的指标。

对于 3.3 中的模拟数据，应用以上 5 个指标进行分析，统计结果如下：

表 3-6 针对企业决策的数据分析

	决策组合成为最优决策的频率 %	平均利润	变异系数	左半变异系数	亏损概率 (%)
参数-分散	0.53	3.974	1.439	1.107	16.980
参数-集中	49.37	5.162	1.349	0.995	18.030
决策-分散	33.11	4.100	1.162	0.868	12.800
决策-集中	16.99	5.284	1.106	0.831	13.440
真实-分散		5.414	0.929	0.722	16.550
真实-集中		7.167	0.874	0.701	17.530

由上表可知，在 3.3 中的参数组合下，四种组合中，尽管参数-集中的决策组合成为最优决策的频率最高，但决策-集中的平均利润、左半变异系数以及亏损概率均要优于参数-集中。对于资金充足且偏好风险的企业来说，决策组合成为最优决策的概率是最重要的指标，因此采用参数-集中是最合适的策略；而对于资金不充足或风险规避的企业来说，亏损概率以及左半变异系数是更为重要的指标，因此选择决策-集中的策略组合是最合理的。

至于参数-分散和决策-分散两种策略，平均利润远远低于集中供应下的两种策略，因此对于企业来说，这两种策略不予考虑。

3.4.2 分散供应与集中供应的利润比较

第二章中通过公式推导，证明了在已知分布参数下，集中供应的期望利润高于分散供应，但并没有给出定量的结论。而在本节中，将根据给定的参数，从参数估计法、决策变量法以及理想水平三种情况下观察分散供应与集中供应的利润，并且通过设定指标，得出定量的结论。

设定观测指标如下：

(1) 集中供应相对分散供应平均提升（降低）的利润百分比

为得知集中供应相对分散供应能给企业提升（降低）多少百分比的利润，采用公式：

$$p = \left(\frac{\bar{\pi}_C}{\bar{\pi}_D} - 1 \right) \times 100\% \quad (3-24)$$

p 为负值代表集中供应相对分散供应平均降低的利润百分比。

(2) 集中供应相对分散供应平均提升（降低）的利润

为得知集中供应相对分散供应能给企业提升（降低）多少利润，采用公式：

$$\pi = \frac{\sum_{k=1}^{10000} (\pi_{k-C} - \pi_{k-D})}{10000} = \bar{\pi}_C - \bar{\pi}_D \quad (3-25)$$

π 为负值代表集中供应相对分散供应平均降低的利润百分比。

(3) 集中供应相对分散供应平均提升（降低）利润的变异系数

为衡量集中供应相对分散供应平均提升（降低）利润的稳定性，采用变异系数作为指标，公式为：

$$CV_{\Delta\pi} = \frac{E\{[(\pi_{k-C} - \pi_{k-D}) - E(\pi_{k-C} - \pi_{k-D})]^2\}}{E(\pi_{k-C} - \pi_{k-D})}, k = 1, 2, \dots, 10000 \quad (3-26)$$

变异系数越高，证明集中供应相对分散供应平均提升的利润越不稳定。

对于 3.3 中的数据模拟，应用以上 3 个指标进行分析统计，得出结果如下：

表 3-7 分散供应与集中供应利润的比较

集中供应相对分散供应：	平均提升的利润百分比	平均提升利润	平均提升利润的变异系数
已知真实参数	32.385	1.753	1.638
参数估计法	29.911	1.189	2.186
决策变量法	28.859	1.183	2.002

观测可知，在 3.3 中的参数组合下，不论是否已知真实分布，集中供应平均提升的利润以及利润百分比都是正值，即，集中供应均要优于分散供应。同时，分别观测已知分布参数与未知分布参数：如果分布已知，集中供应约比分散供应提升 32%，约 1.75 的利润值；如果分布未知，集中供应约比分散供应提升 30%，约 1.19 的利润。但相比分布已知的情况下，未知分布参数下的参数估计法与决策变量法，平均提升的利润值更低，提升利润的变异系数更高。因此在分布未知的情况下，集中供应相对分散供应的优势没有分布已知时明显。

在这一章中，我设定了数据模拟的方法与步骤，通过多次数据模拟，设定定量指标，帮助企业制定最优的策略，并比较了集中供应与分散供应的利润，得出了一些较为显著的结论。然而我们发现，这些结论是基于给定的参数组下，即： $s=3, c=1, m=10, n=5$ ，并

且 $\theta = 3$ 。而当某个或者某些参数发生改变时，以上结论是否仍然成立？在下一章中，本文将逐个观测不同的参数下，企业的最优策略以及集中供应相对分散供应的优势会有什么样的变化。

第四章 需求独立同分布下模型参数对于最优策略的影响

第三章中我们已经求得了在需求独立同分布且参数未知的情况下，对于多区域报童模型，企业采用不同策略下所产生的商品利润公式。并且利用数据模拟，帮助企业制定最优策略。同时，通过公式我们还发现，商品利润 $\pi = f(m, n, s, c, x_{i,j}, x_{i,n+1})$ ，其中 $x_{i,j}$ 与 $x_{i,n+1}$ 是服从参数为 θ 的指数分布的随机需求变量，在数据模拟中，均是通过公式 (3-8) 产生，其中 ε 为在 0 到 1 之间，服从均匀分布的随机数。

由此，我们尝试逐一改变参数，并且找出每一个参数对于企业策略组合的选择以及集中供应相对分散供应优势的影响。

4.1 需求区域数改变的影响

在第三章中给定的参数下， $m=2$ 。我们考虑控制其余参数不变，逐渐增大 m 的值，观测每一种参数组合的一系列指标

首先考虑观察改变 m 对于企业制定最优策略的影响。增大 m 的值至 5。我们假设 $m=5, n=1, s=3, c=1, \theta=3$ ，在这组参数组下，产生 10000 组需求数据，进行 10000 次数据模拟（重复 3.3.1 中步骤一至步骤四），对于模拟产生的企业不同策略下各指标进行统计，初步结果如下：

表 4-1 $m=5$ 时针对企业决策的数据分析

	决策组合成为最优决策的频率 %	平均利润	变异系数	左半变异系数	亏损概率 (%)
参数-分散	0	11.667	0.728	0.524	7.520
参数-集中	45.24	18.789	0.667	0.480	7.290
决策-分散	15.15	11.749	0.665	0.471	5.700
决策-集中	39.61	18.839	0.613	0.437	5.550
真实-分散		13.307	0.594	0.427	5.030
真实-集中		22.187	0.531	0.413	4.430

随后进一步增大 m 的值为 10，进行 10000 次模拟，指标统计结果如下：

表 4-2 $m=10$ 时针对企业决策的数据分析

	决策组合成为最优决策的频率 %	平均利润	变异系数	左半变异系数	亏损概率 (%)
参数-分散	0	25.398	0.462	0.330	2.030
参数-集中	44.12	44.627	0.419	0.304	1.460
决策-分散	3.06	25.427	0.443	0.314	1.570
决策-集中	52.82	44.574	0.399	0.289	1.110
真实-分散		27.133	0.414	0.296	0.820
真实-集中		49.555	0.356	0.281	0.360

对于表 4-1 与表 4-2 中的数据，与上一章中表 3-6 的数据相比，我们发现，对于企业的决策者来说，随着 m 不断增大，决策-集中在最优决策频率，变异系数，左半变异系数以及亏损概率等指标上仍然优于参数-集中，因此企业仍然应该选择决策-集中作为企业的运营策略。

进一步观察数据，当 m 逐渐增大时（从 $m=2$ ，到 $m=5$ ，再到 $m=10$ ），各参数组合的变异系数以及亏损概率均逐渐减小。同时我们发现，在最优决策频率这一指标上，决策-集中的策略组合成为最优决策的频率有所增加，参数-集中的策略组合成为最优决策的频率有所降

低；然而在平均利润这一指标上，随着 m 的增加，参数-集中与决策-集中的平均利润差不断缩小，并最终超过了决策集中，同时两种策略组合的平均利润、变异系数以及亏损概率等各项指标上的差距均有所缩小。因此选择集中供应与分散供应差别不大。

观察 m 增大对于集中供应相对分散供应优势的影响。分别增大 m 至 5 与 10，得到指标统计结果如下：

表 4-3 $m=5$ 时针对集中供应相对分散供应优势的分析

集中供应相对分散供应：	平均提升的利润百分比	平均提升利润	平均提升利润的变异系数
已知真实参数	66.729	8.880	0.806
参数估计法	61.037	7.121	0.977
决策变量法	60.337	7.089	0.936

表 4-4 $m=10$ 时针对集中供应相对分散供应优势的分析

集中供应相对分散供应：	平均提升的利润百分比	平均提升利润	平均提升利润的变异系数
已知真实参数	82.637	22.422	0.519
参数估计法	75.709	19.229	0.620
决策变量法	75.301	19.147	0.603

观察比较第三章中表 3-7 的数据以及表 4-3 与表 4-4 中的数据，可知，当 m 增大时，集中供应相对分散供应平均提升的利润百分比和利润值都有明显增加，而平均提升利润的变异系数下降明显。对此我们认为，在其他参数不变的前提下，随着 m 增大，集中供应与分散供应的平均利润（约等于期望利润）均增加，然而由于风险汇减效应，随着 m 逐渐增大，集中的平均利润（期望利润）增长幅度明显高于分散供应的平均利润涨幅，因此两者差别就越明显。同时，由于大数定律，两者利润差值的变异系数均有所减小，因此，集中供应相对分散供应平均提升利润的变异系数也显著减小。

4.2 需求周期个数对于企业最优策略的影响

在上一章中，我们假设 n 的值为 1。在这一节中，我们对于需求周期个数 n 进行改变，观测其对于最优决策选择以及集中与分散供应优劣的影响。

首先考虑观察改变 n 对于企业制定最优策略的影响。分别增加 n 至 5 与 10。其余的参数保持不变，即： $m=2, s=3, c=1, \theta=3$ 。在这组参数下，进行 10000 次数据模拟，得到各指标统计结果如下：

表 4-5 $n=5$ 时针对企业决策的数据分析

	决策组合成为最优决策的频率 %	平均利润	变异系数	左半变异系数	亏损概率 (%)
参数-分散	0.01	5.137	1.010	0.724	16.980
参数-集中	39.04	6.841	0.943	0.694	17.810
决策-分散	41.06	5.137	0.968	0.693	15.940
决策-集中	19.89	6.841	0.902	0.666	16.920
真实-分散		5.517	0.912	0.660	16.350
真实-集中		7.418	0.846	0.648	17.300

表 4-6 $n=10$ 时针对企业决策的数据分析

	决策组合成为最优决策的频率 %	平均利润	变异系数	左半变异系数	亏损概率 (%)
参数-分散	1.05	5.270	0.967	0.692	16.840
参数-集中	35.62	6.977	0.911	0.675	17.870
决策-分散	43.53	5.272	0.946	0.677	16.170
决策-集中	19.8	6.978	0.889	0.661	17.330
真实-分散		5.431	0.927	0.667	16.570
真实-集中		7.201	0.871	0.659	17.620

对于表 4-5 与表 4-6 中的数据，与上一章中表（3-6）的数据相比，我们发现，对于企业的决策者来说，随着 n 不断增大，参数-集中在利润变异系数，左半变异系数以及亏损概率等指标上与决策-集中策略的差距均明显缩小，考虑到参数-集中成为最优决策的概率高于

决策-集中, 因此我们认为, 企业选择参数-集中策略是最有效的。对于另外两种分散供应策略组合, 在平均利润这一指标上与集中供应的两种策略组合差距明显, 因此, 企业在选择时不考虑这两种策略组合。

进一步观察三个 n 的值下的统计数据, 我们发现, 当 n 从 1 增加到 5 时, 未知分布参数下各策略组合的平均利润均有明显提升, 已知分布参数下两种供应策略的平均利润无变化。而当 n 从 5 增加到 10 时, 未知分布参数下的策略组合和已知分布参数下的两种供应策略的平均利润均没有太明显的增势。

对于这种现象, 我们认为, 在未知分布参数下, n 的增长增加了历史需求数据的信息量, 相比 $n=2$ 时只有两个历史需求可供参考, 当 $n=5$ 时, 企业决策者能够从 5 个历史需求数据中估计 θ , 因而准确度大大提升。这一结论的依据在于表 4-5 中, 相应决策组合下的平均利润已经接近理想利润水平。当 n 从 5 提升到 10 时, 尽管未知分布参数下的平均利润进一步向理想水平靠拢, 然而增加的幅度不及 n 从 2 到 5 时那么明显。

在已知分布参数下, 历史需求数据对于企业制定订货量的决策没有任何影响。因此不论 n 的数量如何变化, 只要其他参数不变, 平均利润等各项数据就不会发生太大的变动。

观察 n 增大对于集中供应与分散供应优劣的影响。分别增大 n 至 5 与 10, 得到指标统计结果如下:

表 4-7 $n=5$ 时针对集中供应相对分散供应优势的分析

集中供应相对分散供应:	平均提升的利润百分比	平均提升利润	平均提升利润的变异系数
已知真实参数	34.462	1.901	1.556
参数估计法	33.179	1.704	1.695
决策变量法	33.165	1.704	1.645

表 4-8 $n=10$ 时针对集中供应相对分散供应优势的分析

集中供应相对分散供应:	平均提升的利润百分比	平均提升利润	平均提升利润的变异系数
已知真实参数	32.590	1.770	1.635
参数估计法	32.387	1.707	1.672
决策变量法	32.362	1.706	1.647

观察比较第三章中表 3-7 的数据以及表 4-7 与表 4-8 中的数据, 可知: 当 n 增大时, 未知分布参数的利润与已知分布参数下的利润差别缩小。同时, 集中供应相对分散供应平均提升利润的变异系数有所降低。其原因同样在于需求信息量的增加使得企业提升需求分布估计的准确性, 因而降低了平均提升利润的变异系数, 缩小了未知分布参数与理想水平 (已知分布参数) 的差别。

4.3 商品的成本与价格对于企业最优策略的影响

商品的成本与售价对于利润的影响关联度较大, 为了观察商品成本与售价对于企业最优策略的影响以及集中供应与分散供应的优劣, 通过改变参数, 观测不同参数组合的一系列指标。

4.3.1 当 s 增大时各指标的统计与分析

固定成本以及其余参数不变, 即: $m=2, n=1, c=1, \theta=3$, 首先逐渐增加 s 的值, 分别模拟 s 等于 10 与 20 时, 各策略组合的利润值, 根据第三章中设定的指标得到统计结果如下:

表 4-9 $s=10$ 时针对企业决策的数据分析

	决策组合成为最优决策的频率 %	平均利润	变异系数	左半变异系数	亏损概率 (%)
参数-分散	0.31	33.415	0.895	0.552	9.320
参数-集中	73.69	37.087	0.849	0.514	7.190
决策-分散	13.26	33.415	0.896	0.553	9.370
决策-集中	12.74	37.091	0.849	0.514	7.210
真实-分散		40.362	0.764	0.501	7.670
真实-集中		44.936	0.746	0.485	5.710

表 4-10 $s=20$ 时针对企业决策的数据分析

	决策组合成为最优决策的频率 %	平均利润	变异系数	左半变异系数	亏损概率 (%)
参数-分散	0.05	82.704	0.791	0.465	4.550
参数-集中	78.77	87.607	0.771	0.448	3.120
决策-分散	9.83	83.131	0.821	0.484	5.730
决策-集中	11.35	88.509	0.793	0.460	3.910
真实-分散		96.233	0.742	0.460	3.750
真实-集中		102.352	0.729	0.448	2.370

通过观测表 4-9、表 4-10 以及第三章中表 3-6 中的数据, 可知对于企业决策者来说, 随着 s 的不断增大, 参数-集中成为最有决策的频率逐渐增加, 决策-集中成为最优决策的频率逐渐减少, 然而另一方面, 我们发现决策-集中的平均利润、变异系数、左半变异系数以及亏损概率仍然优于参数-集中, 综合考虑, 我们认为企业需要根据自身的特点制定战略决策。对于风险偏好或资金充足的企业, 最优决策频率的指标更为重要, 因此可以考虑采用参数-集中的策略; 而对于风险规避或者资金不足的企业来说, 平均利润以及利润的稳定性更为重要, 因此应当选择决策-集中策略。

进一步观测 s 增大时, 各指标的数据, 我们发现各策略组合下的平均利润显著增加, 变异系数、左半变异系数以及亏损概率逐渐减小。前者是因为商品售价上升而成本与期望需求不变, 导致盈利能力大大提升; 后者是由于商品售价 s 的提升, 售价相对成本的比例也随之提升, 导致商品订货量即使与已知分布参数下的最优订货量有偏差, 利润仍然与理想水平差别不大。因此, 当 s 增加的时候, 变异系数与左半变异系数均降低。

观察 s 增大对于集中供应与分散供应优劣的影响。分别增大 s 至 5 与 10, 得到指标统计结果如下:

表 4-11 $s=10$ 时针对集中供应相对分散供应优势的分析

集中供应相对分散供应:	平均提升的利润百分比	平均提升利润	平均提升利润的变异系数
已知真实参数	11.333	4.574	1.943
参数估计法	10.988	3.672	2.023
决策变量法	11.003	3.677	2.020

表 4-12 $s=20$ 时针对集中供应相对分散供应优势的分析

集中供应相对分散供应:	平均提升的利润百分比	平均提升利润	平均提升利润的变异系数
已知真实参数	6.358	6.119	2.403
参数估计法	5.928	4.903	2.791
决策变量法	6.469	5.378	2.459

观察比较第三章中表 3-7 的数据以及表 4-11 与表 4-12 的数据, 可知: 集中供应相对分散供应的优势被缩小。当 s 增大时, 集中供应相对分散供应平均提升的利润百分比与平均利润值显著降低, 但与此同时, 平均提升利润的变异系数有所增加。其原因在于 s 的增加导致了企业各策略组合的平均利润都大幅增加, 以至于掩盖了集中供应的优势, 使得集中供应相对于分散供应的利润优势不再明显。

4.3.2 当 s 减小时, 各指标的统计与分析

固定其余的参数不变, 即: $m=2, n=1, c=1, \theta=3$, 单独降低 s 的值至 1.5 与 1.05,

经过模拟与统计，得到结果如下：

表 4-13 $s=1.5$ 时针对企业决策的数据分析

	决策组合成为最优决策的频率 %	平均利润	变异系数	左半变异系数	亏损概率 (%)
参数-分散	0.3	0.334	3.419	2.810	25.190
参数-集中	71	0.548	3.701	3.148	19.990
决策-分散	14.9	0.389	1.942	1.526	18.970
决策-集中	13.8	0.691	1.885	1.557	12.710
真实-分散		0.563	1.389	1.127	26.090
真实-集中		1.061	1.206	1.067	18.870

表 4-14 $s=1.05$ 时针对企业决策的数据分析

	决策组合成为最优决策的频率 %	平均利润	变异系数	左半变异系数	亏损概率 (%)
参数-分散	0.99	0.003	17.631	16.841	8.930
参数-集中	93.93	0.004	56.308	54.847	5.760
决策-分散	1.87	0.004	6.017	5.730	6.090
决策-集中	3.21	0.019	6.259	6.084	2.940
真实-分散		0.007	4.033	3.890	8.640
真实-集中		0.033	3.072	3.021	4.500

通过表 4-13 与表 4-14 以及第三章中表 3-6 的数据可知，当 s 降低时，从企业决策者的角度看，参数-集中成为最优策略的频率逐渐增大，而决策-集中在平均利润、变异系数、左半变异系数以及亏损概率等指标上远远领先前者。对于企业决策者，同样应该结合自身特点决定最优策略。对于资金充足或风险偏好的企业，参数集中是最合适的策略组合；而对于资金不充足或风险规避的企业，决策-集中是最合适的策略。

进一步观测数据我们发现，当 s 从 3 降低至 1.5 时，各策略亏损概率有所增加，而当 s 从 1.5 降至 1.05 时，亏损概率大幅降低。为了探究其原因，利用 Excel 表格画出了参数 α 等于 2, β 等于 3 时，伽马分布的概率密度函数及累积函数如下：

图 4-1 Gamma 分布的概率密度函数

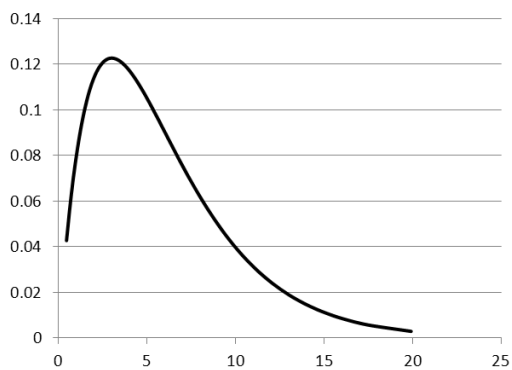
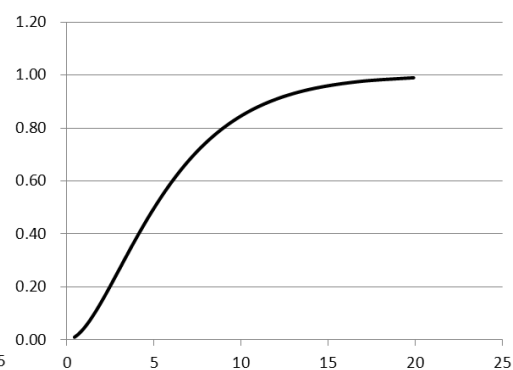


图 4-2 Gamma 分布的概率累积函数



其中概率密度函数的横坐标为需求值，纵坐标为需求对应的频率；概率累积函数的横坐标为需求值，纵坐标为需求小于横坐标需求值的概率。

首先观测 s 从 3 降低至 1.5 的情况。由于公式 (2-3) 可知：当 $s=3$ 时， $\frac{s-c}{s}$ 的值从 $\frac{2}{3}$ ，

累积函数的横坐标约等于 8，在左图密度函数中，其所对应的纵坐标值为 0.06。而当 s 降低至 1.5 时， $\frac{s-c}{s}$ 的值降低至 $\frac{1}{3}$ ，在概率密度曲线上，得到其所对应的纵坐标值约为 0.11。

由此可知，当 s 从 3 降低到 1.5 时，需求概率累积分布曲线上最优订货量附近的斜率明显增加，曲线变得更为陡峭，因此，出现亏损的概率大幅上升。

其次观测 s 从 1.5 降至 1.05 的情况。同样，当 $s=1.05$ 时， $\frac{s-c}{s}$ 约等于 0.048，在概率

密度曲线中所对应的纵坐标值为 0.05，由此可知，当 s 从 1.5 降低至 1.05 时，需求概率累积分布曲线上，最优订货量附近的斜率明显降低，曲线更为平缓，因此，出现亏损的概率大幅降低。

观察 s 降低对于集中供应与分散供应优劣的影响。分别降低 s 至 1.5 与 1.05，得到指标统计结果如下：

表 4-15 $s=1.5$ 时针对集中供应相对分散供应优势的分析

集中供应相对分散供应：	平均提升的利润百分比	平均提升利润	平均提升利润的变异系数
已知真实参数	88.571	0.498	1.771
参数估计法	63.894	0.214	5.767
决策变量法	77.694	0.302	2.776

表 4-16 $s=1.05$ 时针对集中供应相对分散供应优势的分析

集中供应相对分散供应：	平均提升的利润百分比	平均提升利润	平均提升利润的变异系数
已知真实参数	157.998	0.170	2.170
参数估计法	103.624	0.066	9.838
决策变量法	143.860	0.106	3.377

观察表 4-15、表 4-16 与第三章中表 3-7 可知，降低 s ，集中供应相对分散供应的优势显著扩大，这体现在集中供应相对分散供应平均提升的利润百分比显著增加。其原因在于，降低了商品的售价，价格与成本的比值减小，商品的利润对于订货量更为敏感，因此，集中供应策略的风险汇减优势就体现出来了。

4.3.3 改变商品成本 c 对于企业策略的影响

固定商品售价不变，单独增加和降低商品成本 c ，观测企业最优决策的变化以及集中供应相对分散供应的优劣变化。

通过数据模拟，我们发现，当商品成本 c 增加时，大部分的分析结果与商品售价 s 降低时一致；相应地当商品成本 c 减小时，大部分分析结果与商品售价 s 增加时一致。其原因在于，在最优订货量的表达式中，由公式（2-3）可得：

$$Q^* = F^{-1}\left(\frac{s-c}{s}\right) = F^{-1}\left(1 - \frac{c}{s}\right) \quad (4-1)$$

因此商品的最优订货量与 $\frac{c}{s}$ ，即成本与售价的比值相关，而不论分散供应策略的商品利润：

$$\pi_{TD} = \sum_{i=1}^m s(\min\{Q_i^*, x_i\} - \frac{cQ_i^*}{s}), \quad (4-2)$$

$$\text{还是集中供应下的商品利润: } \pi_{TC} = s(\min\{Q_C^*, x_0\} - \frac{cQ_C^*}{s}), \quad (4-3)$$

均与 $\frac{c}{s}$ 紧密相关，因此可以解释商品的成本与售价对于企业决策的影响是紧密相连的。

4.4 真实需求分布参数对于企业最优策略的影响

在其余参数不变的条件下，即： $m=2, n=1, s=3, c=1$ ，增加或降低真实分布参数 θ 的值，观测企业最优策略以及集中供应相对于分散供应优劣的变化。

改变 θ 至 0.5, 1 与 10，分别进行 10000 次模拟，根据第三章中所设定的指标进行统计，结果如下：

表 4-17 $\theta=0.5$ 时针对企业决策的数据分析

	决策组合成为最优决策的频率 %	平均利润	变异系数	左半变异系数	亏损概率 (%)
参数-分散	0.35	0.644	1.476	1.073	17.670
参数-集中	49.89	0.845	1.379	0.972	18.610
决策-分散	33.06	0.666	1.183	0.830	13.260
决策-集中	16.7	0.867	1.123	0.773	13.980
真实-分散		0.900	0.940	0.679	17.090
真实-集中		1.198	0.879	0.667	18.190

表 4-18 $\theta=1$ 时针对企业决策的数据分析

	决策组合成为最优决策的频率 %	平均利润	变异系数	左半变异系数	亏损概率 (%)
参数-分散	0.39	1.311	1.501	1.081	17.780
参数-集中	49.89	1.713	1.386	0.979	18.560
决策-分散	33	1.354	1.209	0.839	13.650
决策-集中	16.72	1.755	1.136	0.781	14.210
真实-分散		1.786	0.944	0.679	16.920
真实-集中		2.381	0.884	0.668	18.070

表 4-19 $\theta=10$ 时针对企业决策的数据分析

	决策组合成为最优决策的频率 %	平均利润	变异系数	左半变异系数	亏损概率 (%)
参数-分散	0.27	12.826	1.516	1.102	18.230
参数-集中	50	17.013	1.404	0.988	19.040
决策-分散	33.56	13.282	1.213	0.851	13.280
决策-集中	16.17	17.422	1.146	0.787	14.060
真实-分散		17.882	0.938	0.676	16.490
真实-集中		23.999	0.875	0.663	17.590

通过第三章中表 3-6 以及表 4-17, 4-18 与 4-19 中的数据，我们发现真实分布参数 θ 的改变对于企业选择最优决策没有影响，决策组合成为最优决策的频率、变异系数、左半变异系数以及亏损概率等指标几乎不变。而由于改变了分布参数，导致了商品的平均利润也发生同步改变，不过这对于企业的决策不产生影响。

观察 θ 改变对于集中供应与分散供应优劣的影响。分别改变 s 至 0.5, 1 与 10，得到指标统计结果如下：

表 4-20 $\theta=0.5$ 时针对集中供应相对分散供应优势的分析

集中供应相对分散供应：	平均提升的利润百分比	平均提升利润	平均提升利润的变异系数
已知真实参数	33.114	0.298	1.616
参数估计法	31.332	0.202	2.190
决策变量法	30.075	0.200	1.990

表 4-21 $\theta=1$ 时针对集中供应相对分散供应优势的分析

集中供应相对分散供应：	平均提升的利润百分比	平均提升利润	平均提升利润的变异系数
已知真实参数	33.305	0.595	1.625
参数估计法	30.683	0.402	2.144
决策变量法	29.594	0.401	1.969

表 4-22 $\theta=10$ 时针对集中供应相对分散供应优势的分析

集中供应相对分散供应：	平均提升的利润百分比	平均提升利润	平均提升利润的变异系数
已知真实参数	32.385	1.753	1.638
参数估计法	29.911	1.189	2.186
决策变量法	28.859	1.183	2.002

结合第三章中表 3-7 的数据,我们发现尽管 θ 的值发生变化,集中供应相对分散供应优势保持不变,这一结论的依据在于集中供应相对分散供应平均提升的利润百分比以及变异系数均保持不变。而由于 θ 的变化导致分散供应与集中供应的平均利润发生同步变化,因此两者之差,即“平均提升利润”的值也发生同步变化。不过,这一变化对于集中供应与分散供应策略的比较不存在影响。

4.5 本章小结

至此,我们已经逐一对影响报童模型利润的参数做了改变,以观测不同参数的变化,对于企业最优决策以及集中供应相对分散供应优劣的影响。较为基本的结论是:不论参数组合发生何种变化,集中供应始终要优于分散供应,因此企业在任何情况下,选择集中供应始终是正确的策略。至于使用参数估计法还是决策变量法,我们认为,企业一是需要根据具体的参数组合,进行数据模拟,得出结论;二是需要结合自身的特点,比如资金是否充足,对风险是否偏好等等实际情况,来做出合理的判断。

第五章 需求独立非同分布下多区域报童问题的数据模拟

在上两章中，我们在需求分布未知且服从独立同分布下，通过数据模拟，寻找企业的最优策略，观测集中供应与分散供应的优劣比较。而现实中，独立同分布是非常理想化的假设，就以行政区域划分为例，公司商品在每个区域的需求受到公司业务覆盖率、地区人口、经济规模的影响。一般而言，每个区域的需求分布是不同的。在本章中，我们将第三章中的报童模型进一步拓展，在各个区域需求属于指数分布，相互独立但参数未知且不相同的情况下（以下简称需求独立非同分布），通过数据模拟，应用回归分析等方法，观测企业不同策略组合在模型中的表现，选择最优的策略组合。

本章第一部分主要介绍未知分布参数下，独立非同分布报童模型的背景以及参数设定；第二部分主要介绍对于分散和集中供应的订货量确定方法，包括在集中供应中所采用的回归分析的方法；第三部分主要介绍最优策略组合的选择。

5.1 独立非同分布报童问题的模型

假设 A 企业在某地 10 个区域中拥有业务，通过以往的生产销售经验，企业的决策者得知每个区域的需求相互独立并且均服从指数分布，但无法得知每个区域需求的分布参数。商品的售价和成本在所有区域统一，历史销售周期数量为 5。即对于企业，假设参数为：

$m=10, n=5, s=3, c=1$ ，企业需要决定订货量的确定方法，并且选择集中供应还是分散供应策略。

同时为了进行数据模拟，假设每个区域 L_i 的需求服从参数为 θ_i 的指数分布：

表 5-1 独立非同分布下各区域需求分布

需求区域	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9	L10
需求分布参数	9	10	6	7	6	7	5	5	5	1

根据公式 $x_{i,j} = -\theta_i \ln(1-\varepsilon)$, $i=1,2,...,m, j=1,2,...,n$, (5-1)

其中 ε 为 0 到 1 之间服从均匀分布的随机数，产生需求模拟数据，如下：

表 5-2 独立非同分布下需求数据

	Tn					Tn+1	
	T1	T2	T3	T4	T5		真实分布参数
L1	3.94	5.98	5.18	13.07	8.87	13.41	9
L2	10.71	1.57	4.05	1.97	41.19	0.27	10
L3	0.11	7.45	2.92	26.27	10.21	5.85	6
L4	4.36	3.28	7.34	0.16	5.16	17.83	7
L5	2.12	0.07	5.17	1.39	2.94	9.68	6
L6	0.71	2.93	5.81	0.89	3.59	0.12	7
L7	3.62	16.80	8.73	0.25	0.92	6.12	5
L8	0.05	19.56	5.03	0.73	11.78	16.32	5
L9	0.02	0.97	0.82	1.60	7.03	4.53	5
L10	0.27	0.41	0.72	0.21	1.85	1.36	1
L0	25.91	59.00	45.77	46.53	93.53		

其中 T_n 的五个周期为历史需求周期, T_{n+1} 周期为下一销售周期的需求数据, 企业在做决策时, 无法知晓 T_{n+1} 周期的需求数据。

对于企业来说, 需要参考历史需求数据, 通过不同的订货量选择方法 (参数估计法或决策变量法), 采用集中供应或分散供应, 并分别计算每种策略组合下的商品利润总和。

5.2 需求独立非同分布下商品订货量的确定

5.2.1 分散供应下的订货量确定

对于需求独立非同分布多区域报童问题, 分散供应下, 订货量的确定方法和 3.3 中相类似, 包括参数-分散法和决策-分散法。

其中, 参数-分散法的订货量确定方式如下:

$$Q_{PE-i}^* = F^{inv}\left(\frac{s-c}{s}, \hat{\theta}_i\right) = \hat{\theta}_i \ln\left(\frac{s}{c}\right), \text{ 其中 } \hat{\theta}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{i,j}, \quad (5-2)$$

L_i 区域下商品的利润值为:

$$\pi_{PE-D,i}(\hat{\theta}_i, x_{n+1}) = s \min\{Q_{PE-i}^*, x_{i,n+1}\} - cQ_{PE-i}^* \quad (5-3)$$

在参数分散法下, 所有区域的商品利润总和为:

$$\pi_{PE-TD} = \sum_{i=1}^m \pi_{D,i}(\hat{\theta}_i, x_{n+1}) \quad (5-4)$$

决策-分散法的订货量确定方式如下:

$$Q_{DV-i}^* = \sum_{j=1}^n x_{i,j} \left(\left(\frac{s}{c} \right)^{\frac{1}{nm+1}} - 1 \right), \quad (5-5)$$

L_i 区域下商品的利润值为:

$$\pi_{DV-D,i}(Q_i^*, x_{n+1}) = s \min\{Q_{DV-i}^*, x_{i,n+1}\} - cQ_{DV-i}^* \quad (5-6)$$

决策变量法下, 所有区域商品的利润总和为:

$$\pi_{PE-TD} = \sum_{i=1}^m \pi_{D,i}(\hat{\theta}_i, x_{n+1}) \quad (5-7)$$

5.2.2 模拟与回归分析法

对于独立非同分布下的分散供应, 我们可以采用第三章的方法去确定订货量, 然而对于集中供应, 同样的方法就不再适用。其原因在于, 当需求独立非同分布时, 难以找到一个分布去描述 m 个参数不同的需求指数分布的和。因此, 我们需要采用回归分析的方法, 通过数据模拟寻找最适合描述集中供应下商品总需求的分布。

我们假设对于 5.1 中给定的参数组, 存在一个服从伽马分布的函数, 能够准确地描述集中供应下的需求。在本节中, 我们需要证明这一结论的正确性。

首先, 根据 5.1 中的参数组合, 产生 500 组需求数据, 进行第一次模拟, 如下:

表 5-3 回归分析法的第一次模拟

需求区域	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9	L10	L0
真实需求分布参数	9	10	6	7	6	7	5	5	5	1	
模拟次数: 1	12.6	35.8	7.5	3.2	3.9	0.6	1.8	0.5	4.0	0.7	70.5
2	2.5	4.1	5.8	6.4	8.8	10.6	0.2	13.7	0.7	0.4	53.2
3	21.2	3.1	12.0	17.9	11.8	0.5	23.0	12.1	4.3	0.3	106.3
.....											
500	2.1	4.5	4.1	1.6	3.6	2.9	8.0	4.0	13.3	0.6	44.8

其中, L1 至 L10 的数据服从公式: $x_{i,j} = -\theta_i \ln(1-\varepsilon)$, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$ (其中 ε 为 0 到 1 之间服从均匀分布的随机数); L0 中的数据为所有区域的需求总和, 即集中供应下的需求总和。对于 L0 中的 500 个需求总和的数据, 我们需要寻找到合适的概率累计函数来描述其分布。将其至小到大排序, 如下:

表 5-4 500 次模拟下所有区域总需求的排序

至小到大排序	总需求小于该值的概率	总需求
1	0	17.10
2	0.002	22.43
3	0.004	22.66
.....		
500	0.998	143.91

将上表中第二列作为应变量, 第三列作为自变量, 利用 SPSS 软件进行伽马分布的非线性回归, 得到的参数估计值如下:

表 5-5 参数估计值及其标准误差与置信区间

参数估计值				
参数	估计	标准误差	95% 置信区间	
			下限	上限
Alpha	7.801	.045	7.711	7.890
Beta	8.085	.049	7.989	8.182

可知 $\alpha = 7.801$, $\beta = 8.085$, 因此, 集中供应的总需求量服从 θ 为 7.801 与 8.085 的伽马分布。其中, R 方约等于 0.998, 证明该回归函数已经能够很好地描述该参数组合下, 所有区域需求之和的分布。

重复本节中的模拟与回归的过程, 进行多组 500 次模拟, 回归得到的伽马分布的参数基本相同, R 方也始终高于 0.997 的水平。因此, 我们认为, 利用回归分析寻找到合适的伽马函数, 来描述所有区域需求总和的方法是有效而正确的。因此得以证明我们的假设。

5.2.3 集中供应下的订货量确定

对于独立非同分布多区域报童问题, 在上一节中模拟回归分析的基础上, 分别通过参数-集中法和决策-集中法决定商品订货量。

其中, 参数-分散法的订货量确定方式如下:

$$Q_{PE-C}^* = \text{Gamma}^{inv}\left(\frac{s-c}{s}, m, \hat{\theta}_C\right) \text{ 为最优订货量, 其中 } \hat{\theta}_C = \sum_{i=1}^m \hat{\theta}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{0,j} \quad (5-8)$$

参数-集中法下, 所有区域的商品利润总和为:

$$\pi_{TC} = \pi(Q_{PE-C}^*) = s \min\{Q_{PE-C}^*, x_0\} - cQ_{PE-C}^* \quad (5-9)$$

决策-分散法的订货量确定方法如下：

$$Q_{DV-0}^* = \text{Gamma}^{-1}\left(\frac{s-c}{s}, m, \frac{\sum_{j=1}^n x_{0,j} \left(\left(\frac{s}{c}\right)^{\frac{1}{n+1}} - 1\right)}{\ln(s/c)}\right), \quad (5-10)$$

决策-集中法下，所有区域的商品利润总和为：

$$\pi_{TC} = \pi(Q_{DV-0}^*) = s \min\{Q_{DV-0}^*, x_0\} - cQ_{DV-0}^* \quad (5-11)$$

因此我们得到了四种不同的策略组合下订货量的确定方法。

5.3 需求独立非同分布的企业策略组合的选择

在第三章中，我们通过设定不同的指标，分析模拟结果，来帮助企业选择最合适的策略组合。在需求独立非同分布的情况下，我们同样需要通过多次模拟，统计每一种策略组合在最优订货量下的利润，并依据第三章中的设定的指标，选择最佳策略组合并比较集中供应与分散供应的优劣。

首先，对于上一节中，给定的参数组以及每个区域的需求参数，进行 10000 次数据模拟，统计未知分布参数下四种策略组合以及已知分布参数下两种供应策略的利润总和，如下：

表 5-6 需求独立非同分布下 1000 次模拟数据

	不同策略组合下利润总和					
模拟次数	参数-分散	参数-集中	决策-分散	决策-集中	真实-分散	真实-集中
1	69.76	137.89	69.75	136.66	85.83	135.01
2	71.44	119.05	71.09	117.98	91.35	135.01
.....						
10000	41.35	92.25	41.33	92.83	78.57	89.68

对于表中的利润数据，采用第三章中的各个指标进行分析，初步统计结论如下：

表 5-7 需求独立非同分布下针对企业决策的数据分析

	决策组合成为最优决策的频率 %	平均利润	变异系数	左半变异系数	亏损概率 (%)
	0	48.075	0.535	0.377	3.110
参数-集中	36.45	96.111	0.395	0.303	1.100
决策-分散	1.22	48.126	0.530	0.374	3.070
决策-集中	62.33	96.101	0.389	0.299	1.030
真实-分散		54.895	0.447	0.319	1.330
真实-集中		98.633	0.381	0.301	0.760

由上表可知，四种策略组合中，决策-集中成为最优决策的频率最高，并且决策-集中在变异系数、左半变异系数以及亏损概率均要优于参数-集中。在平均利润上，参数-集中略高于决策集中。综合来看，企业选择决策-集中的策略组合是最合理的。

为观测在分布参数未知且非同的情况下，集中供应相对于分散供应的优势，参照第三章中的设定，统计各指标数值如下：

表 5-8 需求独立非同分布下集中供应相对分散供应优势的分析

集中供应相对分散供应：	平均提升的利润百分比	平均提升利润	平均提升利润的变异系数
已知真实参数	79.677	43.739	0.551
参数估计法	99.921	48.037	0.542
决策变量法	99.684	47.974	0.538

观察得知，在已知分布参数下，集中供应相对分散供应能平均提升 80% 的利润，大约

43.739, 在未知分布参数下, 集中供应相对分散供应平均提升约 100% 的利润, 大约 48.0, 均高于已知分布参数下的数据。其原因在于表 5-7 中, 真实-分散的平均利润远远高出参数-分散与决策-分散, 因此集中供应的相对优势不如未知分布参数下那么明显了。

在本章中, 我们通过设定一组参数, 利用回归分析的方法估计集中供应下需求总和的分布参数, 由此得出各策略组合下的利润, 并通过一系列的指标进行了分析。除此之外, 我们还尝试改变不同的参数值, 逐一进行模拟分析, 得出的基本结论是: 在分布参数未知且非同的情况下, 集中供应仍然要优于分散供应, 同时, 对于策略组合的选择, 企业需要结合具体的参数以及自身的情况来做出决定, 通常企业策略选择在决策-集中与参数-集中之间。

第六章 总结

在之前的章节中，我们对于多区域报童模型进行了研究，在之前学者对于已知分布参数下多区域报童问题研究的基础上，探索了未知需求分布的情况下多区域报童问题。在第一章中，介绍了报童模型与多区域报童模型的背景，包括本文中所采用的 Liyanage 与 Shanthikumar 的运营统计学理念；第二章中借用了 Pao-Long Chang 和 Chin-Tsai Lin^[17]的缩放思想，证明了对于任何已知分布参数的报童模型，在最优订货量下，集中供应的期望利润高于分散供应；在第三章中，我们提出了集中供应与分散供应两种不同的供应策略，以及参数估计法与决策变量法两种订货量决定方法，由此产生企业在模型中的四种不同的策略组合。并且对于需求独立同分布时的需求数据模拟、企业决策、集中供应相对分散供应优势的比较做了介绍；在第四章中，我们探讨了逐一改变参数组合对于模型的影响，并且利用第三章中设定的一系列指标帮助企业选择最优的策略组合，并观察集中供应相对分散供应优势的变化。在第五章中，我们拓展了报童模型的设定条件，探讨了独立非同分布下，企业最优决策的选择，并且比较了集中供应相对分散供应的优势。同时，本文还采用回归与参数估计的方式，寻找到对于独立非同分布，集中供应需求数据模拟的方法。

尽管本文通过对未知分布参数下多区域报童模型的探索，得出了一系列的结论，然而在研究的方法和过程中，仍然存在一系列的问题，主要包括：

（1）需求数据的准确性值得商榷

对于单周期，单独区域的传统报童问题，决策者能够通过商品订单量较为准确地得到需求数据。然而本文中所考虑的是单周期，多区域报童问题，在需求统计方面无疑是增加了难度。对于分散供应的系统，在每个区域商品供给均能够满足订单时，需求可以被准确地估计。然而，如果允许多次跨区域订货，一旦某个区域商品供给不足，就有可能存在需求被放大的情况。为了解释这一结论，假设某区域的供给均无法满足需求，此时，新产生的订单首先会向本区域的供给点订货，在得知供给不足的情况下，则会转向其他区域订货。在这种情况下，需求数据就被放大了，其后果是影响企业对于下一销售周期商品需求量的判断。因此，在本文的报童模型中，对于此类问题的解决尚需探讨。

（2）分布假设存在缺陷

本文的模型假设每个区域商品需求服从指数分布，在现实当中，这一假设有时难以成立。在一些情况下，商品需求会服从正态分布、泊松分布甚至 0-1 分布。比如在一个供应链系统中，存在 N 个购买者，每个购买者在单周期内购买商品的概率为 p ，那么对整个供应链来说，商品需求量就服从 (p, N) 的泊松分布。单考虑指数分布的需求分布，本身就存在一定的局限性，因而我们对于最优订货量的判断，也难免存在偏差。

（3）模型中对于某些参数存在过度简化

本文所设定的报童模型，是对于现实当中的多区域报童问题进行了简化，但为了方便计算，某些参数存在被过度简化的现象。比如，在模型中，运输成本、前置时间、仓库的建立成本、管理成本等等，都被忽略不计。在现实中，这些参数在一定程度上会对我们的结论产生影响，比如假设考虑运输成本，集中供应相对分散供应的优势就会被缩小，甚至在某些情况下，集中供应的风险汇减效应被高昂的运输成本所掩盖，企业选择分散供应反而更好。

（4）不同参数间可能存在相互影响

在第四章中，我们对于需求区域数、需求周期数、商品售价、商品成本以及参数 θ 逐一进行改变，观测参数变化对于企业策略以及集中供应相对分散供应的优势。然而，在实际中，不同参数之间可能会存在相互影响。在本模型中，由于所参考的指标较多，参数取值的水平（Level）也较广，因此检验参数间的相互影响就存在着一定的困难。

（5）企业的策略组合尚存在提升空间

在第三至第五章中，我们发现，企业四种策略组合下的利润往往无法达到理想利润水平（已知分布参数）。尤其是在订货量的决定方式上，当历史需求信息量较少时，采用参数估计法与决策变量法所得到的最优订货量与已知分布参数下的最优订货量存在较大的差距。在今后，我们可以进一步寻找一种更好的订货量决定方法，使得企业的策略组合的利润更接近理想水平，使企业的利润更高、更稳定。

参考文献

- [1] 23rd Annual State of Logistics Report, Council of Supply Chain Management Professionals [J/OL]. 2012, <http://cscmp.org/state-logistics-report/23rd-annual-state-logistics-report>.
- [2] Gary D.Eppen. On effect of centralization on expected costs in a multi-location newsboy problem[J]. Management Science, Volume 25, Issue 5,1979:498-501.
- [3] Edgeworth, F. The mathematical theory of banking[J]. Royal Statist. Sco.51, 1888, 113-127
- [4] Whitin TM. Inventory control and price theory[J]. Management Science, 1955; 2:61-8.
- [5] Khouja, Moutaz. The single-period (news-vendor) problem: literature review and suggestions for future research[J]. Omega, 1999, Vol.27(5), pp.537-553
- [6] Kabak I, Schiff A. Inventory models and management objectives[J]. Sloan Manage Review 1978;10:53-9.
- [7] Ciarallo FW, Akella R, Morton TE. A periodic review, production planning model with uncertain demand-optimality of extended myopic policies[J]. Management Sci. 1994;40:320-32.
- [8] Jain K, Silver EA. The single period procurement problem where dedicated supplier capacity can be reserved. Naval Res Logist, 1995;42:915-34.
- [9] Shih W. Optimal inventory policies when stock-out result from defective products[J]. Int J Prod Res, 1980;18:677-86.
- [10] Scarf H. A min-max solution of an inventory problem. In: Arrow K, Karlin S, Scarf H, editors. Studies in the mathematical theory of inventory and production[J]. Stanford, CA: Stanford University Press, 1958: 201-9.
- [11] Zizhuo Wang, Peter W. Glynn, Yinyu Ye. Likelihood Robust Optimization for Data-Driven Newsvendor Problems[C]. 2010(10).
- [12] Hadley G, Whitin TM. Analysis of inventory systems[J]. Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Englewood, 1963.
- [13] Lau H, Lau A. The newsstand problem: a capacitated multiple-product single period inventory problem[J]. Eur J Opl Res, 1996;94:29-42.
- [14] Cerchak Y, Henig D. An inventory model with component commonality[J]. Oper Res Lett, 1986;5:157-60.
- [15] Liwan H. Liyanage, J. George Shanthiumar. A practical inventory control policy using operational statistics[J]. Operations Research Letters 33, 2005:341-348.
- [16] Alan Stulman. Benefits of centralized stocking for the multi-center newsboy problem with first come first served allocation[J]. The Journal of the Operational Research Society. Vol.38.No.9, 1987;pp:827-832.
- [17] Pao-Long Chang and Chin-Tsai Lin. On the effect of centralization on expected costs in a multi-location newsboy problem[J]. The Journal of the Operational Research Society. Vol.42. No.11, 1991;pp:1025-1030.
- [18] Miao-Sheng Chen, Chen-Tsai Lin. An Example of Disbenefits of Centralized Stocking[J]. The Journal of the Operational Research Society, Vol.41, No.3, 1990:259-262.

谢辞

本论文是在我的导师荣鹰老师的悉心指导与帮助下完成的。他从容的科学态度，严谨的治学精神，精益求精的工作作风，使我耳濡目染。从课题的选择到最终完成，荣老师都一直给予我细心的指导和不懈的支持。在此谨向荣老师致以诚挚的谢意和崇高的敬意。

同时还要感谢蒋炜老师对我论文选题、撰写的大力支持，以及教务处极富耐心、工作认真负责的康聪娟老师和赵红蕾老师，感谢邵进明与周彦珉同学，正是有了大家的经常性交流才是我的课题能够顺利进行，而且通过在讨论过程中相互促进和学习，使我解决问题的能力得到进一步提升。

TO POOL OR NOT TO POOL

RISK POOLING EFFECT UNDER DEMAND

ESTIMATION

The primary purpose of this paper is to study the risk pooling effect of multi-location newsvendor problem. The traditional study of multi-location newsvendor problem focuses on known distribution demand, while we consider demand with unknown distribution parameter in our model.

The paper consists of six sections. The first section is research review and introduction. The next four sections are about newsvendor modeling. In Section 2 we focus on known distribution newsvendor model. In Section 3 and 4 we focus on the unknown distributions with i.i.d. In Section 5 we extend our model to independent, unknown distributions with non-identical parameters. Section 6, the last part of the paper, is about summary of the thesis, as well as some problems and flaws.

Newsvendor model is an important discipline of inventory management, with a history of more than a century. It is first established by Edgeworth, who was trying to solve a banking problem. Great importance was attached to newsvendor model by people who studied inventory management during the last century. Further research and extensions based on the newsvendor model are made to solve different kinds of inventory problems. According to Moutaz Khouja, the extensions of single period newsvendor problem can be classified into eleven categories, including eight introduced in Section 1 in the paper.

Multi-location newsvendor model is among the eleven categories by Khouja. The basic model of multi-location newsvendor problem was established by Eppen in 1955. In addition to other settings of traditional newsvendor model, the company has to choose between two strategies, that is, centralization and decentralization. In an area with multiple sales region, centralization stands for all products supplied by central warehouse, while decentralization stands for all products supplied by local warehouses in each region. Eppen proved that under normal distribution, the expected profit of the company taking centralized strategy is larger than which taking decentralized strategy. Other scholars, like Stulman, Pao-Long Chang and Chen-Tsai Lin, extended Eppen's model, thus making multi-location problem a strong discipline of newsvendor problem. These people's work are briefly summarized in Section 1.

Besides these categories, a new methodology of operational statistics by Liyanage and Shanthikumar is introduced in Section 1, which strongly related to the methodology in this paper.

In the second section, we introduced the basic settings of known exponential distribution multi-location newsvendor model. Based on the model we set, we used the mathematical method of Pao-Long Chang and Chen-Tsai Lin to prove that under same condition with known exponential distribution, the total expected profit of a company with centralized strategy is bigger

than de-centralized strategy. However, the mathematical method can only deal with expected profit or cost. The conclusion cannot always stand under detailed situations. Also, it is based on the hypothesis of known distribution. In reality, we have to deal with unknown distribution in most cases. Therefore, we have to find out a better methodology to this model.

As mentioned, Liyanage and Shanthikumar developed a operational statistics to solve the inventory problem with unknown distribution. In the paper, we adopted their methodology and try to deal with multi-location newsvendor problem with unknown distribution parameter. Under unknown demand distribution, besides centralization and decentralization, the company has to choose the right strategy of order quantity making, that is, separating estimation and optimization, and combining estimation and optimization. Therefore, the two choices make four different combinations of the strategies of the company. In Section 3, we used simulation and analysis to help find out the best combination of strategy. First, we generated a set of sales demand, including historical demand and demand for the next sales period. Then we calculated a series of profit figures under four different strategies. Also, we need to observe the profit data under known distribution with centralized or decentralized strategy, so that we can compare with the profit under unknown distribution. The six figures are calculated by a series of formulas in Section 3. To eliminate the randomness of the data, we had to replicate the simulations. In Section 3, through experiments, we found out that the randomness is at satisfactory level when number of replications reaches 10000. Through Excel, we generated 10000 set of random demand and calculate the six profit figures of each simulation. After that, to help make the best choice between four strategies, we set a series of figure to observe the effectiveness of each strategy on increasing the total profit. Also, through some figures, we observe the advantage of centralization over decentralization.

In Section 3, we reached some conclusion in a fixed set of parameters in the model. These conclusions may change when one or some parameters change. In Section 4, we tried to change each parameters, such as the number of demand regions, the number of sales period, sales price, cost, as well as the real demand distribution parameter. After each 10000 set of simulation and analysis, we had some basic conclusions, that is, under almost any combinations of parameters, centralization is always superior to decentralization. Therefore, the company should always choose the centralized strategy. As to the policy of order quantity making, although the result shows that the ordering policy combining estimation and optimization is often superior than which separating estimation and optimization, we believe the company should make the right choice based on both the result of simulations of specific parameters, and characteristics of the company, such as adequacy of currency and preference of risk.

In Section 3 and 4, we discussed the newsvendor model with unknown but i.i.d. demand distributions. In Section 5, the settings are extended to unknown, independent but non-identical demand distributions. Such change may result in some difficulties that lie in calculating the profit of different strategies, especially to the centralized strategies. This is because under non-identical demand distribution, we cannot find out a distribution that represents the sum of several exponential distributions. To solve this problem, we used regression and estimation in Section 5. We generate 500 set of sales demand data under a fixed combination of parameters in our model. Through non-linear regression we conduct in SPSS, we found out that Gamma distribution can accurately represent the sum of exponential distributions in the fixed set of parameters in our model. We estimated the two parameters of the Gamma distribution, which is alpha and beta. We

found out that the estimation is highly convincing. Through regression, we calculated the profit of each strategy like we did in Section 4, and made analysis through figures we set to help find out both the best strategy and the advantage of centralization over decentralization.

Through simulation, regression and estimation, we reached some conclusions of newsvendor model under unknown distribution. But still, there exists some problems and flaws in the model, including the inaccuracy of counting demand in each region, the defections of demand distribution assumptions, the over simplifications of different parameters in the model, the lack of consideration of the interactions of different parameters in the model. In Section 6, I listed down the detailed flaws and problems, and gave reasons of how some of these problems and flaws may end up affecting the validity of our conclusions in specific situations. Limited by knowledge and capability in data processing, these flaws to me are difficult to solve in the process of simulation and thesis writing. Although I do hope in the future, I can improve the model to meet the actual situation in reality.