

# 上海交通大学

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

## 学士学位论文

THESIS OF BACHELOR



论文题目：Taub-NUT 度量的 Einstein 场方程及其性质研究

学生姓名：朱知非

学生学号：5080719030

专 业：数学与应用数学

指导教师：陈春丽

学院(系)：数学系

# Taub-NUT 度量的 Einstein 场方程及其性质研究

## 摘 要

Taub-NUT 度量是弦论中与 Kaluza-Klein 单极子相关的 Ricci 平坦的五维几何度量  $ds_5^2$  中的四维度量。本文主要通过广义相对论的方法, 验证了 Taub-NUT 度量的 Ricci 平坦的性质, 并对  $ds_5^2$  可能存在的奇点进行了分析讨论。

利用联络 1-形式与曲率形式, 可以计算出 Taub-NUT 的黎曼曲率张量, 并进一步得到 Ricci 曲率张量和 Einstein 场方程。通过求解  $ds_5^2$  的真空场方程, 得到其中未知函数的表达式及其对应的度量。对得到的不同度量所可能存在的奇点进行分析, 计算奇点处的 Kretschmann 不变量以判断空间弯曲性。通过 Euler-Lagrange 方程计算奇点附近的零测地线轨迹, 得到奇点附近光线离奇点距离和时间之间的关系, 由此判断度量的奇点的性质。

关键词: Taub-NUT 度量, 曲率形式, Ricci 曲率张量, Einstein 场方程, Euler-Lagrange 方程, 零测地线

# A Study on Einstein Field Equation of Taub-NUT Metric and its Properties

## ABSTRACT

Taub-NUT metric is the four dimensional part of the five dimensional Ricci-flat metric  $ds_5^2$ , which is related to Kaluza-Klein monopole. This article verifies the Ricci-flat property via general relativity methods, and analyzes the possible singularity of the metric.

By calculating connection one-forms and curvature forms, one obtains the Riemannian curvature tensor of Taub-NUT metric and further calculations can show the Ricci curvature tensor and Einstein field equations(EFE). Via solving the EFEs, one may obtain the solutions of the unknown function of  $ds_5^2$  and their relevant metrics. To determine the bending property of the space near the possible singularity, one calculates the Kretschmann invariant. And via Euler-Lagrange equations, one may determine the properties of the singularity by analyzing radius-time relationship of the null geodesics around it.

*Key Words:* Taub-NUT metric, curvature form, Ricci curvature tensor, Einstein field equation, Euler-Lagrange equation, null geodesic

## 目 录

摘要	i
Abstract	ii
插图目录	iv
第一章 前言	1
1.1 弦论简介 . . . . .	1
1.2 高维黑洞的研究 . . . . .	2
1.3 本文的主要工作 . . . . .	3
第二章 黎曼流形与广义相对论简介	4
2.1 黎曼流形 . . . . .	4
2.1.1 基本定义 . . . . .	4
2.1.2 曲率张量与曲率形式 . . . . .	5
2.1.3 测地线 . . . . .	8
2.2 广义相对论简介 . . . . .	9
2.2.1 光锥 . . . . .	10
2.2.2 Einstein 场方程 . . . . .	10
2.2.3 Schwarzschild 黑洞 . . . . .	11
第三章 Taub-NUT 度量的 Einstein 场方程	13
3.1 Taub-NUT 度量的黎曼曲率张量 . . . . .	13
3.2 Taub-NUT 度量的 Einstein 场方程 . . . . .	18
第四章 $ds_5^2$ 度量的性质	21
4.1 $V_1(r)$ 对应度量的性质 . . . . .	21
4.2 $V_2(r)$ 对应度量的性质 . . . . .	26
4.3 结论与展望 . . . . .	30
参考文献	31
致谢	33

## 插图目录

4.1	$r-t$ 曲线数值模拟, $V = V_1, A = 0, E = 2, R = 1$ . . . . .	25
4.2	$r-t$ 曲线数值模拟, $V = V_1, A = 1, E = 2, R = 1$ . . . . .	26
4.3	$r-t$ 曲线数值模拟, $V = V_2, A = 0, E = 2, R = 1$ . . . . .	28
4.4	$r-t$ 曲线数值模拟, $V = V_2, A = 1, E = 2, R = 1$ . . . . .	29

## 第一章 前言

广义相对论和量子场论是二十世纪物理学理论最主要的两大成就，然而两者并非互相协调的理论。弦论作为二十世纪后期兴起的理论，是结合两者的一个成功尝试。Taub-NUT 度量是弦论中描述 Kaluza-Klein 单极子的五维几何度量中的四维度量，后者在弦理论中拥有很高的应用价值。本文主要通过广义相对论对 Taub-NUT 度量进行数学上的刻画。

### §1.1 弦论简介

Taub-NUT 度量本身在弦论中有着很深刻的物理意义，所以我们将在本节简单的介绍一些弦论的背景，具体的细节可以参考 [1] 或者 [2]。

弦论的基本想法是所有的物质均由细小的弦组成，换句话说，我们将基本粒子看作以不同方式振动的弦而不是看作粒子。弦在时空中运动将扫出一片二维的区域，称为弦的世界叶（类比于粒子的世界线）。与粒子类似的，我们可以描述弦的动力学。用于描述弦长的主要参数都十分小，通常在  $10^{-35}m$  的数量级，以至于粒子通常和点状区别不大。弦论是统一自然界的四种基本作用力和基本粒子的一个候选理论，此处统一是指所有的粒子都能被弦的不同振动方式所描述。

弦论的另一个重要特征是它能给出我们一个有限的量子引力理论。弦论中的量子稳定性对时空的最高维数会有所要求，这个临界维数将被弦的世界叶上超对称变换的数目  $N$  决定。考虑到弦的世界叶的某些性质限制，只有四种 ( $N = 0, 1, 2, 4$ ) 局部超对称能够给出稳定的弦理论。对于  $N = 0$  的情况称为玻色弦，时空的临界维数是 26 维，但这种情况下存在许多问题，比如其不包含费米子。对于  $N = 2$ ，时空临界维数是 4 维，但是其度量的符号不对，而对于  $N = 4$  的情况时空的临界维数将小于 0，因此不可能。于是我们考虑的只有  $N = 1$  的情况，此时时空临界维数是 10 维。然而在十维的弦论中，我们有五种稳定的不同的弦论。

量子稳定性要求时空的维数为 10，然而根据 [3]，超对称将会给出时空维数的上限。如果我们要求在四维下，引力是唯一的，那么超对称的数目不能超过 8，这将暗示时空维数至多为 11 维。事实上，在 11 维时空下存在唯一的  $N = 1$  超引力理论。十一维的超引力理论在圆上的 Kaluza-Klein 退化将得到 IIA 型超引力理论，它是 IIA 型超弦理论在低能量下的作用，后者是我们之前提到的五种弦论之一。E.Witten 注意到了这两者之间关系的重要性，他猜想应当存在一种 M-理论，将统一所有的 10 维弦论，这种统一理论应当是 11 维的。人们由此意识到了不同的弦理论之间的对称的重要性，后来这被称为“第二次超弦革命”。

根据 [1] 和 [4]，M-理论将弦看作为一种更一般结构的特例，这种结构被称为膜。弦论中的 D-膜是一种可以让弦的两端以某些条件固定的物体，它是十一维超引力理论的稳态解。D-6 膜是 D-0 膜的磁对偶，而后者被理解为沿着第十一维

圆的 Kaluza-Klein 激发。其中用于描述 Kaluza-Klein 单极子的五维几何度量就是

$$ds_5^2 = -dt^2 + ds_{TN}^2, \quad (1.1)$$

其中  $ds_{TN}^2$  就是 Taub-NUT 度量, 本文将在后几章讨论 Taub-NUT 度量的 Einstein 场方程以及其性质。

## §1.2 高维黑洞的研究

Taub-NUT 度量是描述 Kaluza-Klein 单极子的五维几何度量中的四维度量。根据 [1], 从几何直观上这个度量对应的流形正如同一个雪茄型小圆柱体, 其一边的端点连接着一张 D-6 膜, 在远离端点的地方, 其形状如  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$ 。当考虑强耦合极限时, Taub-NUT 度量在极点处会出现一个五维的黑洞。正如上一节所介绍的, 弦论中的空间是十维的, 这使得其计算过程中可能会出现许多高维度的黑洞, Taub-NUT 度量就是其中之一。

对于高维黑洞的研究动机主要在于两点 [5], 其中一点是我们想要知道黑洞的哪些性质是与维数无关的普遍性质, 哪些性质是依赖于维数的。例如黑洞的唯一性, 及其事件视界拓扑均属于后者, 事实上, 最近的研究发现 [6], 存在一些特别的维数, 使得更高维的黑洞的性质会发生突变, 包括事件视界拓扑结构的改变。除了广义相对论的引力理论之外, 正如上文所提及的, 弦论也是我们研究高维黑洞的主要动机, 弦论与 M-理论在低能量状态下可以由高维的引力理论所描述。因此, 引力中的黑物体与弦论中的黑洞或黑膜解有着密切的联系, 这对我们从微观角度理解黑洞的熵 [7] 等性质起着重要作用。

在过去的十多年里, 主要有两大类黑洞被广泛的研究, 一类是渐进平坦空间里带有事件视界的静止解, 另一类是渐进平坦空间里事件视界拥有紧的方向的静态解。前者也被称作旋转黑洞, 后者被称作 Kaluza-Klein 黑洞。对于旋转黑洞最近几年的成果主要集中于五维的情况, 根据 [5], 现已发现除了 Myers-Perry 黑洞以外的旋转黑洞环以及多黑洞解, 这些解均是通过基于对称和逆散射的一类特殊的假定方法 [8] 得到。而对于 Kaluza-Klein(KK) 黑洞, 主要的成果集中在 KK 空间, 即 Minkowski 空间乘球面  $M \times \mathbb{S}^1$ , 有许多 KK 黑洞的相结构在近几年是通过扰动, 数值解等方法得到的 [10], 在这方面有许多性质可以被推广到高维的紧空间上 [9]。

得到黑洞解的方法主要有几类 [5], 其中一类是对称性假设, 这是通过物理背景得到一些对称的条件, 从而得到假设的度量, 进一步通过真空 Einstein 场方程求解。本文对于 Taub-NUT 度量, 也是从其度量出发, 推导求解其 Einstein 场方程, 从而得到度量中的未知函数的具体表达式。此外得到黑洞解的方法有通过数值方法模拟, 经典场论方法 [11], 以及从已知的解得到新的解, 比如逆散射方法, 扰动扩张等等 [12]。

### §1.3 本文的主要工作

本文主要从 Taub-NUT 度量出发, 通过活动标架与外微分的方法推导其黎曼曲率张量, 进一步求得其 Ricci 曲率及真空中的 Einstein 场方程, 并对 Taub-NUT 度量的奇点性质进行了讨论, 对零测地线进行了求解及数值模拟。在第二章, 本文主要描述了黎曼几何与广义相对论的相关背景知识以及后文所采用的方法的理论铺垫, 包括曲率张量的定义, 曲率形式的定义与计算, 用 Euler-Lagrange 方程描述测地线以及 Einstein 场方程与黑洞的相关背景等等。在第三、四章, 本文计算和讨论了 Taub-NUT 度量的 Einstein 场方程及其奇点与零测地线。在第三章中, 本文通过由给定的度量  $ds_3^2$  出发, 计算得到联络 1-形式  $\omega_i^j$  与曲率形式  $\Omega_i^j$ , 进而计算得到给定度量的曲率张量的分量  $R_{ijk}^l$ 。随后, 通过指标缩并运算得到了  $ds_3^2$  的 Ricci 曲率张量及真空中的 Einstein 场方程, 并计算出度量中的一个未知函数的解。在第四章, 本文分类讨论了上一章计算出的不同情况所对应度量的奇点及零测地线的性质, 给出了零测地线的径向半斤  $r$  随时间  $t$  变化的解及其数值模拟, 并比较了两者对应不同度量之间的关系。



## 第二章 黎曼流形与广义相对论简介

### §2.1 黎曼流形

Einstein 在 1915 年引入了广义相对论, 其主要的工具是黎曼几何。黎曼几何主要研究带有黎曼度量的微分流形, Marcel Berger 在二十世纪末写了一本《黎曼几何概论》[13], 回顾了过去和直到最近的黎曼几何工作。当然, 现代黎曼几何的语言要追述到 1936 年 Whitney 首先给出的抽象流形的定义, 这在 Einstein 的时代之后。用几何语言来说, 广义相对论研究的是一类称为洛仑兹流形的几何结构。在本章我们会给出一些黎曼几何的基本概念和工具, 我们将略去其中大多数基础定理的证明。关于微分流形的基本概念, 可以参考 [14]。文章中我们将采用 Einstein 求和约定。

#### §2.1.1 基本定义

**定义 2.1 (黎曼流形)** 设  $M$  是一个  $n$  维光滑流形,  $M$  上的一个黎曼度量  $g$  是指  $M$  上的一个非退化的对称、正定的二阶协变张量场  $g$ 。我们称  $(M, g)$  为一个  $n$  维黎曼流形, 简称为  $M$ 。

定义 2.1 中正定性是说, 设  $(U; u^i), i = 1, 2, \dots, n$  是  $M$  的一个局部坐标,  $g$  在  $U$  上可表示为

$$g = g_{ij} du^i \otimes du^j, \quad (2.1)$$

其中矩阵  $(g_{ij})$  是正定的。关于  $M$  上黎曼度量的存在性证明, 可以参考 [15]。当然, 定义 2.1 里正定的概念可以去除, 对于每一个非退化的双线性型  $g$ , 我们总能找到  $g$  的  $p$  个正的特征值和  $q$  个负的特征值, 并且  $p + q = n$ , 为流形  $M$  的维数。我们将  $(p, q)$  称为度量  $g$  的符号,  $M$  称为广义黎曼流形, 每一个黎曼度量的符号都是  $(n, 0)$ 。实际上在广义相对论中大量用到的度量并非正定的, 而是 Lorentz 型的。

**定义 2.2** 设  $M$  是一个  $n$  维光滑流形,  $g$  是一个  $M$  上符号为  $(n-1, 1)$  的广义黎曼度量, 则称  $g$  是一个 Lorentz 度量,  $(M, g)$  为 Lorentz 流形。

有了度量, 我们可以考虑  $M$  上的联络与度量的相容性, 设  $(M, D)$  是一个  $n$  维仿射联络空间, 即  $D$  为切丛  $TM$  上的联络。记  $\mathcal{T}M$  为  $M$  上全体光滑切向量场, 任意  $X, Y \in \mathcal{T}M$ ,

**定义 2.3**  $\mathcal{T}: \mathcal{T}M \times \mathcal{T}M \rightarrow \mathcal{T}M$ ,

$$\mathcal{T}(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y], \quad (2.2)$$

称  $\mathcal{T}$  为仿射联络空间  $(M, D)$  的挠率张量。

事实上, 可以证明  $\mathcal{T}$  是光滑的  $(1, 2)$  型张量场 [16]。如果  $\mathcal{T} = 0$ , 我们称联络  $D$  是无挠的。可以定义与度量相容的容许联络,

**定义 2.4 (容许联络)** 设  $(M, g)$  是一个广义黎曼流形,  $D$  是  $M$  上的联络, 如果

$$Dg = 0, \quad (2.3)$$

则称  $D$  是  $M$  的容许联络。

关于联络和度量之间关系的一个重要的性质是, 与度量  $g$  相容的无挠联络  $D$  可以由度量唯一确定, 这被称为黎曼几何基本定理, 其证明可以参考 [15] 或 [17]。

**定理 2.5 (黎曼几何基本定理)** 设  $(M, g)$  为广义黎曼流形, 则  $M$  上存在唯一的无挠容许联络  $D$ , 称为  $(M, g)$  的黎曼联络或 Christoffel-Levi-Civita 联络。

由此流形  $M$  上许多由联络确定的量, 比如曲率张量, 可以完全通过黎曼度量来定义, 这样定义出的曲率张量被称作黎曼曲率张量, 我们将在下一节具体讨论。

### §2.1.2 曲率张量与曲率形式

研究空间的弯曲性主要是通过对各类曲率的研究, 首先我们给出仿射联络空间上曲率算子的定义,

**定义 2.6** 设  $(M, D)$  是一个  $n$  维仿射联络空间, 任意  $X, Y \in \mathcal{T}M$ , 定义  $\mathcal{R}(X, Y) : \mathcal{T}M \rightarrow \mathcal{T}M$ ,

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]}Z, \forall Z \in \mathcal{T}M, \quad (2.4)$$

称  $\mathcal{R}(X, Y)$  为  $(M, D)$  关于光滑切向量场  $X, Y$  的曲率算子。

关于曲率算子有一条重要的性质是,

**命题 2.7**  $\forall X, Y, Z \in \mathcal{T}M$ , 以及对无挠联络  $D$ , 成立第一 Bianchi 恒等式

$$\mathcal{R}(X, Y)Z + \mathcal{R}(Y, Z)X + \mathcal{R}(Z, X)Y = 0, \quad (2.5)$$

关于曲率算子的基本性质的证明可以参考 [16] 或 [17]。实际上由定义 2.6 可以看出算子  $\mathcal{R}$  给出了一个三重线性映射,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \mathcal{T}M \times \mathcal{T}M \times \mathcal{T}M &\rightarrow \mathcal{T}M \\ (Z, X, Y) &\mapsto \mathcal{R}(X, Y)Z, \forall X, Y, Z \in \mathcal{T}M, \end{aligned} \quad (2.6)$$

由此确定了一个  $(1, 3)$  型的光滑张量场  $\mathcal{R}$ , 称作曲率张量。由命题 2.7,  $\mathcal{R}$  对每个分量均为  $C^\infty(M)$ -线性。下面考虑其分量表达式,

设  $(U; u^i)$  是  $M$  的一个局部坐标系,  $\Gamma_{ij}^k$  为联络系数, 由计算可得,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\partial_i, \partial_j)\partial_k &= D_{\partial_i}D_{\partial_j}\partial_k - D_{\partial_j}D_{\partial_i}\partial_k - D_{[\partial_i, \partial_j]}\partial_k \\ &= \left( \frac{\partial\Gamma_{kj}^l}{\partial u^i} - \frac{\partial\Gamma_{ki}^l}{\partial u^j} + \Gamma_{kj}^h\Gamma_{hi}^l - \Gamma_{ki}^h\Gamma_{hj}^l \right) \partial_l. \end{aligned} \quad (2.7)$$

若令

$$\mathcal{R}(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{kij}^l \partial_l, \quad (2.8)$$

则有

$$R_{kij}^l = \frac{\partial\Gamma_{kj}^l}{\partial u^i} - \frac{\partial\Gamma_{ki}^l}{\partial u^j} + \Gamma_{kj}^h\Gamma_{hi}^l - \Gamma_{ki}^h\Gamma_{hj}^l, \quad (2.9)$$

以及  $\mathcal{R}$  的局部分量表达式

$$\mathcal{R} = R_{ijk}^l dx^i \otimes \partial_l \otimes dx^j \otimes dx^k. \quad (2.10)$$

黎曼联络  $D$  的联络系数在局部坐标系下还可以写成关于度量矩阵的导数求和 [15], 即

$$\Gamma_{ji}^k = \frac{1}{2}g^{kl} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right). \quad (2.11)$$

如果我们考虑广义黎曼流形  $(M, g)$ , 通过  $g$  的作用我们可以得到一个  $(0, 4)$  型张量场  $R$ ,

**定义 2.8**  $\forall W, X, Y, Z \in \mathcal{T}M$ , 定义

$$\begin{aligned} R: \mathcal{T}M \times \mathcal{T}M \times \mathcal{T}M \times \mathcal{T}M &\rightarrow C^\infty(M) \\ (Z, W, X, Y) &\mapsto g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W), \end{aligned} \quad (2.12)$$

称  $R$  为  $(M, g)$  的黎曼曲率张量。

同样我们可以考虑  $R$  的分量表达式, 如果考虑 (2.1), 令

$$R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = R_{ijkl}, \quad (2.13)$$

由定义 2.8 立刻得到

$$R_{ijkl} = g(\mathcal{R}(\partial_k, \partial_l)\partial_i, \partial_j) = g_{hj}R_{ikl}^h, \quad (2.14)$$

其中  $R_{ikl}^h$  如式 (2.9) 所示。换句话说,  $R_{ijkl}$  可以看作  $R_{ikl}^h$  由  $g_{hj}$  指标下降的结果。同样我们可以得到  $(0, 4)$  型张量  $R$  的局部分量表达式

$$R = R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l. \quad (2.15)$$

在 Einstein 场方程中出现的两个重要的曲率分别为 Ricci 曲率与数量曲率, 我们在这里给出它们的定义, 它们的性质和相关证明可参考 [16]。

**定义 2.9** 设  $(M, g)$  是广义黎曼流形,  $\{\varepsilon_i\}$  是  $M$  的局部标架场,  $\{\omega^i\}$  是对偶的余标架场.  $\forall u, v \in T_p M$ , 令

$$\text{Ric}(u, v) = \omega^i(\mathcal{R}(\varepsilon_i, u)v), \quad (2.16)$$

由此给出的对称的二阶协变张量场 Ric 称为  $M$  上的 Ricci 曲率张量场.

取定局部坐标系, 考虑 Ric 的局部分量表达式, 若令  $R_{ij} = \text{Ric}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ , 则有

$$\text{Ric} = R_{ij}\omega^i \otimes \omega^j, \quad (2.17)$$

且其中

$$R_{ij} = g^{kl}R_{ikjl} = R_{ikj}^k. \quad (2.18)$$

接下来我们给出数量曲率的定义, 设  $p \in M$ ,  $\forall u \in T_p M, u \neq 0$ , 令  $\text{Ric}(u) = \frac{\text{Ric}(u, u)}{g(u, u)}$ , 称  $\text{Ric}(u)$  为  $M$  在  $p$  点处沿切方向  $u$  的 Ricci 曲率.

**定义 2.10** 设  $p \in M$ , 设  $\{e_i\}$  为  $p$  处任一单位正交标架, 令

$$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^m \text{Ric}(e_i), \quad (2.19)$$

称  $\mathcal{S}$  为  $M$  在  $p$  处的数量曲率.

$\mathcal{S}$  实际上是 Ric 张量的迹, 可以证明  $\mathcal{S}$  的定义与标架选取无关. 若取定局部坐标系, 则有

$$\mathcal{S} = g^{ij}R_{ij} = g^{ij}R_{ikj}^k = g^{ij}g^{kl}R_{iljk}, \quad (2.20)$$

最后我们定义 Einstein 张量,

**定义 2.11** 称  $(0, 2)$  型张量  $G$  为 Einstein 张量, 若

$$G = \text{Ric} - \frac{1}{2}g\mathcal{S}, \quad (2.21)$$

其分量表达式为  $G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{S}$ .

可以利用活动标架和外微分来处理 and 表示上述曲率张量, 这对计算一个度量所对应的曲率张量是十分方便的. 本文第三章也将通过这种方法来计算 Taub-NUT 度量的曲率张量. 设  $(M, D)$  是仿射联络空间,  $\{\varepsilon_i\}$  是  $M$  的局部标架场,  $\{\omega^i\}$  是对偶的余标架场. 设  $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(M)$  使得,  $D_{\varepsilon_i}\varepsilon_j = \Gamma_{ji}^k\varepsilon_k$ , 令

$$\omega_i^j = \Gamma_{ik}^j\omega^k, \quad (2.22)$$

则有  $D\varepsilon_i = \omega_i^j\varepsilon_j$ , 称 1-形式  $\omega_i^j$  为联络 1-形式. 接着定义曲率形式与挠率形式,

**定义 2.12** 2-形式  $\Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j$  称为仿射联络空间  $(M, D)$  在局部标架场  $\{\varepsilon_i\}$  下的曲率形式。

**定义 2.13** 2-形式  $\Omega^j = d\omega^j - \omega^k \wedge \omega_k^j$  称为仿射联络空间  $(M, D)$  在局部标架场  $\{\varepsilon_i\}$  下的挠率形式。

回顾挠率张量 2.2 与曲率张量 2.6 的定义, 设  $\forall X, Y \in \mathcal{T}M$ , 我们有

**定理 2.14** 对于挠率张量  $\mathcal{T}$  和挠率形式 2.13, 成立 Cartan 第一组结构方程, 即

$$\frac{1}{2}\mathcal{T}^j(X, Y) = (d\omega^j - \omega^k \wedge \omega_k^j)(X, Y) = \Omega^j(X, Y), \quad (2.23)$$

且对于无挠联络, 有挠率形式  $\Omega^j = 0$ 。

对于曲率形式 2.12, 类似的有

**定理 2.15** 设  $R_{ikl}^j$  是联络  $D$  的曲率张量  $\mathcal{R}$  在标架场  $\varepsilon_i$  下的分量, 则有

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = \frac{1}{2}R_{ikl}^j \omega^k \wedge \omega^l, \quad (2.24)$$

上述定理的具体证明都可以参考 [16]。对于  $R_{ijkl}$  的情形, 我们可以通过  $g_{ij}$  使指标下降, 可以令

$$\Omega_{ij} = g_{kj} \Omega_i^k = \frac{1}{2}R_{ijkl} \omega^k \wedge \omega^l. \quad (2.25)$$

通过活动标架与外微分, 计算曲率张量的分量  $R_{ijkl}$  的表达式可以化为求标架场及余标架场的微分, 在通过外积运算计算曲率形式, 比较其系数即可得到曲率张量及 Einstein 张量的表达式。

### §2.1.3 测地线

在广义相对论中, 物质受引力场作用沿时空中的测地线运动, 在本节我们将给出测地线的定义。所谓测地线局部上是时空中连接两点的最短线, 由于时空并非如欧氏空间一样是平坦的, 我们通过联络可以重新定义向量的平行移动, 我们可以通过第一变分法证明, 时空中曲线是局部的两点之间最短线等价于说该曲线的切向量沿自身平行, 具体证明可以参见 [17] 或者 [16]。

**定义 2.16** 仿射联络空间  $(M, D)$  中的曲线  $\gamma: I \rightarrow M$  称为测地线, 若其切向量沿自身平行, 即

$$D_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0. \quad (2.26)$$

对  $t_0 \in I$ ,  $p = \gamma(t_0) \in M$ , 取定  $p$  的局部坐标系  $(U, u^i)$ , 设  $\Gamma_{ij}^k$  为联络系数, 且  $\gamma$  可表示为

$$u^i = u^i(t), i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.27)$$

则有

$$\gamma'(t) = \frac{du^i(t)}{dt} \partial_i, \quad (2.28)$$

那么

$$D_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = \left( \frac{d^2u^k(t)}{dt^2} + \frac{du^j(t)}{dt} \frac{du^i(t)}{dt} \Gamma_{ji}^k(\gamma(t)) \right) \partial_k. \quad (2.29)$$

所以测地线满足的方程组 (2.26) 实际上是

$$\frac{d^2u^k}{dt^2} + \frac{du^j}{dt} \frac{du^i}{dt} \Gamma_{ji}^k = 0, k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.30)$$

考虑 Lorentz 流形  $M$ ,

**定义 2.17** 设  $(M, g)$  是 Lorentz 流形,  $D$  是其 L-C 联络, 我们称  $M$  关于  $D$  的测地线  $\gamma$  为 Lorentz 流形  $M$  的测地线。

若  $g(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0$ , 称  $\gamma$  为零测地线。

若  $g(\gamma'(t), \gamma'(t)) < 0$ , 称  $\gamma$  为类时的测地线。

在计算测地线方程的时候, 也可以利用 Lagrange 量,

$$\mathcal{L} = g_{ij} \frac{du^i(\gamma(t))}{dt} \frac{du^j(\gamma(t))}{dt}. \quad (2.31)$$

记  $\dot{u}^i = \frac{du^i(\gamma(t))}{dt}$ , 则其 Euler-Lagrange 方程为,

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^i} = 0. \quad (2.32)$$

由于

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}^j} = 2g_{ij} \dot{u}^i, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^j} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} \dot{u}^i \dot{u}^k, \quad (2.33)$$

所以 Euler-Lagrange 方程 2.32 等价于

$$g_{ij} \ddot{u}^i + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} \right) \dot{u}^i \dot{u}^k = 0. \quad (2.34)$$

比较式 (2.11), 我们可以发现, 这实际上和定义 2.16 是等价的。

## §2.2 广义相对论简介

广义相对论是 Albert Einstein 于 1916 年发表的, 他用几何的语言来描述引力作用。在广义相对论中, 引力被描述为时空的曲率, 通过 Einstein 场方程, 时空的曲率和物质的应力 - 能量张量被联系在了一起。本章主要描述一些后文中需要用到的物理学背景知识以及他们的数学刻画与几何的理解, 主要包括光锥, Einstein 场方程和黑洞。

### §2.2.1 光锥

在描述广义相对论之前，我们需要首先提及一些狭义相对论中的基本概念。狭义相对论中使用的时空为 Minkowski 时空，它是有标准 Lorentz 度量  $(+, -, -, -)$  的四维空间  $\mathbb{R}^4$ 。我们称粒子在 Minkowski 时空中的轨迹为粒子的世界线，这是因为粒子在时空中的轨迹除了包含粒子的空间位置信息外，还包含了粒子的时间，即其过去与未来。在时空中有一类特殊的子集被称为光锥，它由满足下列方程的点给出，

$$(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 = 0, \quad (2.35)$$

光锥 (2.35) 是时空中  $t_0$  时刻由  $p = (x_0, y_0, z_0)$  点出发的光线的运动轨迹。著名的 Michelson-Morley 实验指出对任何观测者光速是一致的，从直观上看，我们要求时空中的光速在  $p$  处的所有方向均相等，在切空间上这对应着  $g(v, v) = 0$ ，换句话说，光在 Minkowski 时空中拥有零的长度，即 (2.35) 中所表达的。另一方面，有质量的粒子不能比光线运动地更快，由于时空中斜率就是速度，这是说这些粒子的世界线将在光锥的内部，此类曲线拥有类时的切向量，见定义 2.17。光锥 (2.35) 上的直线对应着光的运动路径，被称为零测地线 [19]。物理上，光锥给出了所谓时空的因果结构 [20]，每一个点  $p$  都有一个独立的过去和未来，分别对应着光锥的下半部分和上半部分。

广义相对论主要处理 Lorentz 流形 2.2。在 Lorentz 流形上，每一点的切空间都是 Minkowski 时空，所以我们说广义相对论局部保留了 Minkowski 时空的性质。广义相对论中，光锥可以看作一点的切空间里的一种结构，流形上的光线的轨迹需要总是与光锥相切，换句话说其每一点切向量的长度仍然为 0，对应着 Lorentz 流形上的零测地线。具有正质量的粒子的世界线的切向量仍然需要在光锥内部，它们的轨迹是类时的测地线。颇有争议的是，当流形足够弯曲的时候，流形上可以出现闭合的类时曲线，从物理角度来看，事件发出的信息将回到事件的过去，这将导致悖论。我们现在还不知道弦论是否可以防止闭的类时测地线出现，或者是否出现闭的类时测地线必须要求非物理的条件，当然这已经超出了我们的讨论范围。

### §2.2.2 Einstein 场方程

广义相对论主要由狭义相对论中引入等效原理，这是说重力场与以适当加速度运动的参考系等价，并且在局部保留 Minkowski 时空的性质。正如上节所讨论的，Lorentz 流形  $(M, g)$  中的类时测地线描述拥有非零静质量物体的轨迹，光则由零测地线描述。根据 [4] 所描述，Einstein 场方程出发的两个最根本的要求是，时空中局部的引力来源应当是应力 - 能量 - 动量张量，以及在适当的极限下，广义相对论能过渡为牛顿的引力理论。

具体地说, 在牛顿引力理论中, 引力由质量引起, 直观上这将导致某种加速效应, 即与观测者的世界线  $\gamma$  相邻的平行的测地线, 由于引力的作用将相对于  $\gamma$  加速, 这表现为这些测地线所包含的无穷小的体积的收缩, 其具体数值 Einstein 将其取为牛顿引力理论中的值。在几何上, 这种体积收缩的加速度从几何上可以由 Ricci 曲率张量来描述。另一方面, 引力由质量引起, 应力 - 能量 - 动量张量表现了时空的质量密度, 它联系了质量与体积。由此 Einstein 将两者等同起来得到了最初的 Einstein 场方程, 但由于应力 - 能量张量满足所谓守恒方程 [4], 这将导致 Ricci 曲率张量也满足守恒方程。Einstein 从第二 Bianchi 恒等式导出了实际上满足守恒方程的是 Einstein 张量  $G$ , 其定义见 2.11, 它与 Ricci 曲率张量相差一项。Einstein 最终在 1915 年得出的结论认为两个满足守恒方程的张量应当相等, 他提出了我们现在所知的 Einstein 场方程 [20],

$$G = T + E. \quad (2.36)$$

式 (2.36) 左边的  $G$  为 Einstein 张量, 描述的是时空的弯曲性。式 (2.36) 右边的  $T$  和  $E$  分别是物质和电磁场的应力 - 能量张量。Einstein 场方程 (2.36) 给出了引力场与时空弯曲性之间的关系。通常情况下场方程十分复杂, 即使是对最简单真空中, 即无物质存在  $T = 0, E = 0$  的情形, Einstein 场方程  $G = 0$  等价于,

$$\text{Ric} = 0, \quad (2.37)$$

一般也由大量非线性的偏微分方程组成。这是因为, 根据我们上一节所讨论的, 黎曼曲率张量主要由联络系数及其关于坐标的导数组成。例如对于球对称的流形  $S^2 \times U^2$  而言, 取适当坐标系使得度量矩阵为对角阵, 即

$$ds^2 = f \cdot ((dx^0)^2 - (dx^1)^2) - e^g(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.38)$$

其中  $f, g$  是未知函数, 对应的真空中的 Einstein 场方程由四个式子  $R_{ii} = 0, i = 1, 2, 3, 4$  组成, 它们将给出著名的 Schwarzschild 解。本文第三, 四章主要讨论的是真空中的场方程。

### §2.2.3 Schwarzschild 黑洞

Einstein 场方程的第一个非平凡解是由 Karl Schwarzschild 于 1916 年在广义相对论发表后不久得到的 [19]Schwarzschild 度量,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_H}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.39)$$

它实际上是四维的真空 Einstein 场方程 (2.37) 的解, 描述了一个正质量的黑洞。粗略的说, 黑洞是一个物质引力塌缩形成的时空区域。我们从度量上看, (2.39) 在  $r = r_H$  与  $r = 0$  处产生了奇性。然而通过计算可以发现  $r_H$  处奇性实际上是由坐



标系的选取引起的，我们称  $r = r_H$  对应的超曲面被称为黑洞的事件视界 [21]，这好比是黑洞的半径。

由简单计算可得，事件视界与光锥相切，因此类时的测地线只能进入事件视界内而无法出来，具体可以参见 [22]；从观测者角度，观测者无法获得事件视界内的任何信息，这也是之所以我们称其为黑洞的原因。事件视界外的粒子到达事件视界对观测者而言需要经过无穷多的时间，但其自身的时间参数是有限的，并且最终它总会到达  $r = 0$  的奇点处。在黑洞中心  $r = 0$  处的奇点并非由于坐标选取原因，事实上在  $r = 0$  处，由黎曼曲率缩并得到的 Kretschmann 不变量  $\mathcal{K} = R_{ijkl}R^{ijkl} \sim r^{-6}$  是无穷大，因此从几何上看，那是一颗真正的奇点。

正如上面我们描述的那样，通常奇点会被一个事件视界包裹，但也有一些度量的奇点事件视界半径为零，这类奇点被称为裸奇点。关于裸奇点至今仍有许多争议，但理论上已经发现了许多度量具有这样的性质，尤其是弦论中许多度量的事件视界面积为零，例如超对称的旋转黑洞度量

$$ds^2 = -\lambda^{(-2/3)} \left( dt - \frac{a}{r^2} \sin^2 \theta d\phi + \frac{a}{r^2} \cos^2 \theta d\psi \right)^2 + \lambda^{1/3} (dr^2 + r^2 d\Omega_3^2), \quad (2.40)$$

其事件视界面积在常数  $a$  足够大的时候为 0，将形成一颗裸奇点，具体可参见 [1]。

除了 Schwarzschild 黑洞之外，广义相对论场方程另一个经典的黑洞解是 Kerr 度量。这个度量由 Kerr 在 1963 年提出 [24] 主要描述了一个大质量的旋转黑洞。正如前言中所提及的，关于 Kerr 黑洞人们至今仍在做着大量的研究 [5]，现在主要的结果是在 KK 空间上。许多最近的研究成果表明当真空 Einstein 场方程从四维推广到更高维后，会有大量有趣的新性质，比如对称性的破坏，新的事件视界拓扑 [25] 等等。本文的第四章会具体讨论 Taub-NUT 度量的奇点性质。

### 第三章 Taub-NUT 度量的 Einstein 场方程

#### §3.1 Taub-NUT 度量的黎曼曲率张量

弦论中与 Kaluza-Klein 单极子相关的五维的几何度量是  $ds_5^2 = -dt^2 + ds_{TN}^2$ , 其中 Taub-NUT 度量是

$$ds_{TN}^2 = V(r)^2(dr^2 + r^2 d\Omega_2^2) + \frac{1}{V(r)^2}(dy + R \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\phi)^2. \quad (3.1)$$

上式 (3.1) 中,  $d\Omega_2^2$  是二维单位球的度量,

$$d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2, \quad (3.2)$$

$V(r)$  是只关于  $r$  的函数,  $R$  是弦论中的常数, 其具体物理意义可参见 [2].

本文中讨论的度量主要是式 1.1 中的  $ds_5^2$ . 我们将首先推导其曲率张量. 令  $\tau = it$ , 则有  $-dt^2 = d\tau^2$ , 不失一般性, 我们记  $\tau$  为  $t$ .

根据  $ds_5^2$  定义, 在局部坐标系  $\{t, r, \theta, \phi, y\}$  下度量矩阵  $(g_{ij})$ , 以及其逆矩阵  $(g^{ij})$  分别为,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V(r)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 V(r)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{R^2 \sin^4(\theta/2)}{V(r)^2} + r^2 V(r)^2 \sin^2(\theta) & \frac{R \sin^2(\theta/2)}{V(r)^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{R \sin^2(\theta/2)}{V(r)^2} & \frac{1}{V(r)^2} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{V(r)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 V(r)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\csc^2(\theta)}{r^2 V(r)^2} & -\frac{R \csc^2(\theta) \sin^2(\theta/2)}{r^2 V(r)^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{R \csc^2(\theta) \sin^2(\theta/2)}{r^2 V(r)^2} & \frac{\csc^2(\theta) (R^2 \sin^4(\theta/2) + r^2 V(r)^4 \sin^2(\theta))}{r^2 V(r)^2} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

若记  $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^5$  为切向量  $\{\partial_t, \partial_r, \partial_\theta, \partial_\phi, \partial_y\}$ ,  $\{\omega^i\}_{i=1}^5$  为其对偶的 1- 形式。记局部坐标系  $\{u^1, u^2, u^3, u^4, u^5\} = \{t, r, \theta, \phi, y\}$ , 首先根据式 (2.11), 将 (3.3) 与 (3.4) 代入计算联络系数  $\Gamma_{ji}^k$ ,

$$\begin{aligned}\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 g^{2i} \left( \frac{\partial g_{3i}}{\partial u^3} + \frac{\partial g_{3i}}{\partial u^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial u^i} \right) \\ &= - \frac{r(V(r) + rV'(r))}{V(r)}.\end{aligned}\quad (3.5)$$

同样方法可以求得,

$$\Gamma_{31}^2 = \Gamma_{32}^2 = \Gamma_{34}^2 = \Gamma_{35}^2 = 0. \quad (3.6)$$

由此根据式 (2.22), 计算出联络 1- 形式

$$\begin{aligned}\omega_3^2 &= \sum_{i=1}^5 \Gamma_{3i}^2 \omega^i \\ &= - \frac{r(V(r) + rV'(r))}{V(r)} d\theta.\end{aligned}\quad (3.7)$$

类似的, 可以计算出所有非零的且互相独立的联络 1- 形式如下,

$$\begin{aligned}\omega_2^2 &= \frac{V'(r)dr}{V(r)} \\ \omega_3^2 &= - \frac{rd\theta(V(r) + rV'(r))}{V(r)} \\ \omega_4^2 &= \frac{1}{V(r)^5} [-rV(r)^5 \sin^2(\theta)d\phi - r^2V(r)^4 \sin^2(\theta)V'(r)d\phi \\ &\quad + R \sin^2(\theta/2) (dy + R \sin^2(\theta/2) d\phi) V'(r)] \\ \omega_5^2 &= \frac{(Rd\phi - R \cos(\theta)d\phi + 2dy)V'(r)}{2V(r)^5} \\ \omega_2^3 &= \left( \frac{1}{r} + \frac{V'(r)}{V(r)} \right) d\theta \\ \omega_3^3 &= \left( \frac{1}{r} + \frac{V'(r)}{V(r)} \right) dr \\ \omega_4^3 &= - \frac{[R(Rd\phi - R \cos(\theta)d\phi + dy) + 4r^2 \cos(\theta)d\phi V(r)^4] \sin(\theta)}{4r^2 V(r)^4} \\ \omega_5^3 &= - \frac{Rd\phi \sin(\theta)}{4r^2 V(r)^4} \\ \omega_2^4 &= \left( \frac{1}{r} + \frac{V'(r)}{V(r)} \right) d\phi\end{aligned}\quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
\omega_3^4 &= \frac{[R(Rd\phi - R\cos(\theta)d\phi + 2dy) + 8r^2\cos(\theta)V(r)^4d\phi] \csc(\theta)}{8r^2V(r)^4} \\
\omega_4^4 &= \frac{dr}{r} + \cot(\theta)d\theta + \frac{R^2d\theta \tan(\theta/2)}{8r^2V(r)^4} + \frac{V'(r)dr}{V(r)} \\
\omega_5^4 &= \frac{R \csc(\theta)d\theta}{4r^2V(r)^4} \\
\omega_2^5 &= -\frac{rV'(r)dy + R\sin^2(\theta/2)d\phi(V(r) + 2rV'(r))}{rV(r)} \\
\omega_5^3 &= \frac{R[R(-Rd\phi + R\cos(\theta)d\phi - 2dy) + 8r^2V(r)^4\sin^2(\theta/2)d\phi] \tan(\theta/2)}{16r^2V(r)^4} \\
\omega_5^4 &= -\frac{R\sin(\theta/2)\tan(\theta/2)}{8r^2V(r)^4} [R^2d\theta \sin(\theta/2) + 16r^2\cos(\theta/2)drV(r)^3V'(r) \\
&\quad - 4rV(r)^4(-2\cos(\theta/2)dr + rd\theta \sin(\theta/2))] \\
\omega_5^5 &= -\frac{R^2d\theta \tan(\theta/2)}{8r^2V(r)^4} - \frac{V'(r)dr}{V(r)}.
\end{aligned}$$

接下来计算曲率形式，首先计算联络 1- 形式  $\omega_i^j$  的外微分与外积，

$$\begin{aligned}
d\omega_3^2 &= d\left(-\frac{rdu^3(V(r) + rV'(r))}{V(r)}\right) \\
&= -\frac{rV'(r)}{V(r)}du^2 \wedge du^3 + \frac{r^2V'(r)^2}{V(r)^2}du^2 \wedge du^3 \\
&\quad - \frac{(V(r) + rV'(r))}{V(r)}du^2 \wedge du^3 - \frac{r^2V''(r)}{V(r)}du^2 \wedge du^3 \\
&= -\frac{[V(r)^2 - r^2V'(r)^2 + rV(r)(2V'(r) + rV''(r))]}{V(r)^2}du^2 \wedge du^3 \\
\omega_3^1 \wedge \omega_1^2 &= 0 \\
\omega_3^2 \wedge \omega_2^2 &= \frac{rV'(r)(V(r) + rV'(r))}{V(r)^2}du^2 \wedge du^3 \\
\omega_3^3 \wedge \omega_3^2 &= -\frac{(V(r) + rV'(r))^2}{V(r)^2}du^2 \wedge du^3 \\
\omega_3^4 \wedge \omega_4^2 &= \frac{R \tan(\theta/2) ((1 + \cos(\theta))V(r) + r(1 + 3\cos(\theta))V'(r))}{4rV(r)^5}du^4 \wedge du^5 \\
\omega_3^5 \wedge \omega_5^2 &= \frac{R \csc(\theta) \sin^4(\theta/2)V'(r)}{V(r)^5}du^4 \wedge du^5.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

由此根据 Cartan 的第二组结构方程 (2.24),

$$\begin{aligned}
 \Omega_3^2 &= d\omega_3^2 - \sum_{i=1}^5 \omega_3^i \wedge \omega_i^2 \\
 &= -\frac{r(V(r)V'(r) - rV'(r)^2 + rV(r)V''(r))}{V(r)^2} du^2 \wedge du^3 \\
 &\quad - \frac{R \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) (V(r) + 2rV'(r))}{2rV(r)^5} du^4 \wedge du^5 \\
 &= \frac{1}{2} R_{3kl}^2 \omega^k \wedge \omega^l.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

注意到  $R_{ikl}^j = -R_{ilk}^j$  以及第一 Bianchi 恒等式 (2.5), 比较等式两端  $\omega^k \wedge \omega^l, k, l = 1, 2, \dots, 5$  前的系数可以得到,

$$\begin{aligned}
 R_{323}^2 &= -R_{332}^2 = -\frac{r(V(r)V'(r) - rV'(r)^2 + rV(r)V''(r))}{V(r)^2} \\
 R_{345}^2 &= -R_{354}^2 = -\frac{R \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) (V(r) + 2rV'(r))}{2rV(r)^5} \\
 R_{3ij}^2 &= 0, o.w.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

类似的, 可以得到所有非零互相独立的  $R_{ikl}^j$  如下,

$$\begin{aligned}
 R_{323}^2 &= -\frac{r(V(r)V'(r) - rV'(r)^2 + rV(r)V''(r))}{V(r)^2} \\
 R_{345}^2 &= -\frac{R \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) (V(r) + 2rV'(r))}{2rV(r)^5} \\
 R_{424}^2 &= -\frac{1}{V(r)^6} [rV(r)^5 \sin^2(\theta) V'(r) + 3R^2 \sin^4(\theta/2) V'(r)^2 - r^2 V(r)^4 \sin^2(\theta) V'(r)^2 \\
 &\quad - R^2 V(r) \sin^4(\theta/2) V''(r) + r^2 V(r)^5 \sin^2(\theta) V''(r)] \\
 R_{425}^2 &= \frac{R \sin^2(\theta/2) (-3V'(r)^2 + V(r)V''(r))}{V(r)^6} \\
 R_{434}^2 &= \frac{3R^2 \cos(\theta/2) \sin^3(\theta/2) (V(r) + 2rV'(r))}{2rV(r)^5} \\
 R_{435}^2 &= \frac{R \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) (V(r) + 2rV'(r))}{2rV(r)^5} \\
 R_{524}^2 &= \frac{R \sin^2(\theta/2) (-3V'(r)^2 + V(r)V''(r))}{V(r)^6} \\
 R_{525}^2 &= \frac{-3V'(r)^2 + V(r)V''(r)}{V(r)^6} \\
 R_{223}^3 &= \frac{V(r)V'(r) - rV'(r)^2 + rV(r)V''(r)}{rV(r)^2} \\
 R_{245}^3 &= \frac{R \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) (V(r) + 2rV'(r))}{2r^3 V(r)^5}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
 R_{424}^3 &= \frac{3R^2 \cos(\theta/2) \sin^3(\theta/2) (V(r) + 2rV'(r))}{2r^3V(r)^5} \\
 R_{425}^3 &= \frac{R \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) (V(r) + 2rV'(r))}{r^3V(r)^5} \\
 R_{434}^3 &= -\frac{1}{4r^4V(r)^8} [5R^2r^2 \cos^2(\theta/2) V(r)^4 \sin^2(\theta/2) - 4R^2r^2 \cos(\theta/2) \cot(\theta) \cdot \\
 &\quad V(r)^4 \sin^3(\theta/2) - 2R^2r^2V(r)^4 \sin^4(\theta/2) - R^4 \cos^2(\theta/2) \csc^2(\theta) \sin^6(\theta/2) \\
 &\quad - 4R^2r^3V(r)^3 \sin^4(\theta/2) V'(r) + 8r^5V(r)^7 \sin^2(\theta) V'(r) \\
 &\quad - 4R^2r^4V(r)^2 \sin^4(\theta/2) V'(r)^2 + 4r^6V(r)^6 \sin^2(\theta) V'(r)^2] \\
 R_{435}^3 &= \frac{1}{4r^4V(r)^8} [R(-r^2 \cos^2(\theta/2) V(r)^4 + 2r^2 \cos(\theta/2) \cot(\theta) V(r)^4 \sin(\theta/2) \\
 &\quad + r^2V(r)^4 \sin^2(\theta/2) + R^2 \cos^2(\theta/2) \csc^2(\theta) \sin^4(\theta/2) \\
 &\quad + 4r^3V(r)^3 \sin^2(\theta/2) V'(r) + 4r^4V(r)^2 \sin^2(\theta/2) V'(r)^2] \\
 R_{535}^3 &= \frac{R^2 \cos^2(\theta/2) \csc^2(\theta) \sin^2(\theta/2) + 4r^3V(r)^3 V'(r) + 4r^4V(r)^2 V'(r)^2}{4r^4V(r)^8} \\
 R_{224}^4 &= \frac{V(r)V'(r) - rV'(r)^2 + rV(r)V''(r)}{rV(r)^2} \\
 R_{234}^4 &= -\frac{R^2 \cos(\theta/2) \csc^2(\theta) \sin^3(\theta/2) (V(r) + 2rV'(r))}{2r^3V(r)^5} \\
 R_{235}^4 &= -\frac{R \cos(\theta/2) \csc^2(\theta) \sin(\theta/2) (V(r) + 2rV'(r))}{2r^3V(r)^5} \\
 R_{324}^4 &= -\frac{R^2 \cos(\theta/2) \csc^2(\theta) \sin^3(\theta/2) (V(r) + 2rV'(r))}{r^3V(r)^5} \\
 R_{325}^4 &= -\frac{R \cos(\theta/2) \csc^2(\theta) \sin(\theta/2) (V(r) + 2rV'(r))}{r^3V(r)^5} \\
 R_{334}^4 &= -\frac{1}{4r^2V(r)^4} [\csc^2(\theta)(-4R^2 \cos^2(\theta/2) \sin^2(\theta/2) + 2R^2 \cos(\theta/2) \cot(\theta) \sin^3(\theta/2) \\
 &\quad + R^2 \sin^4(\theta/2) - 8r^3V(r)^3 \sin^2(\theta) V'(r) - 4r^4V(r)^2 \sin^2(\theta) V'(r)^2] \\
 R_{335}^4 &= -\frac{R \csc^2(\theta) (-\cos^2(\theta/2) + 2 \cos(\theta/2) \cot(\theta) \sin(\theta/2) + \sin^2(\theta/2))}{4r^2V(r)^4} \\
 R_{445}^4 &= \frac{1}{4r^4V(r)^8} [R \csc^2(\theta) \sin^2(\theta/2) (R^2 \cos^2(\theta/2) \sin^2(\theta/2) + 4r^3V(r)^3 \sin^2(\theta) V'(r) \\
 &\quad + 4r^4V(r)^2 \sin^2(\theta) V'(r)^2)] \\
 R_{545}^4 &= \frac{\csc^2(\theta) (R^2 \cos^2(\theta/2) \sin^2(\theta/2) + 4r^3V(r)^3 \sin^2(\theta) V'(r) + 4r^4V(r)^2 \sin^2(\theta) V'(r)^2)}{4r^4V(r)^8} \\
 R_{224}^5 &= -\frac{R \sin^2(\theta/2) (V(r)V'(r) - 4rV'(r)^2 + 2rV(r)V''(r))}{rV(r)^2} \\
 R_{225}^5 &= -\frac{-3V'(r)^2 + V(r)V''(r)}{V(r)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{234}^5 &= \frac{R \cos(\theta/2) \csc^2(\theta) \sin(\theta/2) (R^2 \sin^4(\theta/2) - 2r^2 V(r)^4 \sin^2(\theta)) (V(r) + 2rV'(r))}{2r^3 V(r)^5} \\
 R_{235}^5 &= \frac{R^2 \cos(\theta/2) \csc^2(\theta) \sin^3(\theta/2) (V(r) + 2rV'(r))}{2r^3 V(r)^5} \\
 R_{324}^5 &= \frac{R \cos(\theta/2) \csc^2(\theta) \sin(\theta/2) (2R^2 \sin^4(\theta/2) - r^2 V(r)^4 \sin^2(\theta)) (V(r) + 2rV'(r))}{2r^3 V(r)^5} \\
 R_{325}^5 &= \frac{R^2 \cos(\theta/2) \csc^2(\theta) \sin^3(\theta/2) (V(r) + 2rV'(r))}{r^3 V(r)^5} \\
 R_{334}^5 &= -\frac{1}{4r^2 V(r)^4} [R \csc^2(\theta) (5R^2 \cos^2(\theta/2) \sin^4(\theta/2) - 2R^2 \cos(\theta/2) \cot(\theta) \sin^5(\theta/2) \\
 &\quad - R^2 \sin^6(\theta/2) + \frac{1}{2} r^2 V(r)^4 \sin(\theta) \sin(2\theta) - r^2 \cos^2(\theta/2) V(r)^4 \sin^2(\theta) \\
 &\quad + r^2 V(r)^4 \sin^2(\theta/2) \sin^2(\theta) + 12r^3 V(r)^3 \sin^2(\theta/2) \sin^2(\theta) V'(r) \\
 &\quad + 8r^4 V(r)^2 \sin^2(\theta/2) \sin^2(\theta) V'(r)^2] \\
 R_{335}^5 &= -\frac{1}{4r^2 V(r)^4} [\csc^2(\theta) (2R^2 \cos^2(\theta/2) \sin^2(\theta/2) - 2R^2 \cos(\theta/2) \cot(\theta) \sin^3(\theta/2) \\
 &\quad - R^2 \sin^4(\theta/2) + 4r^3 V(r)^3 \sin^2(\theta) V'(r) + 4r^4 V(r)^2 \sin^2(\theta) V'(r)^2] \\
 R_{445}^5 &= -\frac{1}{4r^4 V(r)^8} [\csc^2(\theta) (R^2 \sin^4(\theta/2) + r^2 V(r)^4 \sin^2(\theta)) (R^2 \cos^2(\theta/2) \sin^2(\theta/2) \\
 &\quad + 4r^3 V(r)^3 \sin^2(\theta) V'(r) + 4r^4 V(r)^2 \sin^2(\theta) V'(r)^2] \\
 R_{545}^5 &= -\frac{1}{4r^4 V(r)^8} [R \csc^2(\theta) \sin^2(\theta/2) (R^2 \cos^2(\theta/2) \sin^2(\theta/2) \\
 &\quad + 4r^3 V(r)^3 \sin^2(\theta) V'(r) + 4r^4 V(r)^2 \sin^2(\theta) V'(r)^2].
 \end{aligned}$$

至此我们得到了 34 个互相独立的曲率张量的分量。如式 (2.14) 所示, 通过 (3.3) 的  $g_{ij}$  作用, 可以将  $R_{ikl}^j$  的第二个指标下降得到相应的黎曼曲率张量的分量  $R_{ijkl}$ 。

### §3.2 Taub-NUT 度量的 Einstein 场方程

在本节我们将推导 Taub-NUT 度量的 Einstein 场方程, 本节首先将计算 Taub-NUT 度量的 Ricci 曲率张量。根据式 (2.18), 将曲率张量的分量  $R_{ikl}^j$  的上指标和第二个下指标进行缩并求和后得到 Ricci 曲率张量,

$$\begin{aligned}
 R_{22} &= \sum_{i=1}^5 R_{2i2}^i = R_{232}^3 + R_{242}^4 + R_{252}^5 \\
 &= -\frac{V(r)V'(r) - rV'(r)^2 + rV(r)V''(r)}{rV(r)^2} - \frac{V(r)V'(r) - rV'(r)^2 + rV(r)V''(r)}{rV(r)^2} \\
 &\quad + \frac{-3V'(r)^2 + V(r)V''(r)}{V(r)^2} \\
 &= -\frac{2V(r)V'(r) + rV'(r)^2 + rV(r)V''(r)}{rV(r)^2}.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

考虑 Ricci 张量关于指标的对称性, 得到互相独立且非零项只有下列五项,

$$\begin{aligned}
 R_{22} &= -\frac{2V(r)V'(r) + rV'(r)^2 + rV(r)V''(r)}{rV(r)^2} \\
 R_{33} &= -\frac{R^2 - 8r^4V(r)^2V'(r)^2 + 8r^3V(r)^3(2V'(r) + rV''(r))}{8r^2V(r)^4} \\
 R_{44} &= -\frac{1}{16r^4V(r)^8} \left\{ (R^2(-1 + \cos(\theta)) + 4r^2(1 + \cos(\theta))V(r)^4) \sin^2(\theta/2) \right. \\
 &\quad \left. [R^2 - 8r^4V(r)^2V'(r)^2 + 8r^3V(r)^3(2V'(r) + rV''(r))] \right\} \\
 R_{45} = R_{54} &= \frac{R \sin^2(\theta/2) [R^2 - 8r^4V(r)^2V'(r)^2 + 8r^3V(r)^3(2V'(r) + rV''(r))]}{8r^4V(r)^8} \\
 R_{55} &= \frac{R^2 - 8r^4V(r)^2V'(r)^2 + 8r^3V(r)^3(2V'(r) + rV''(r))}{8r^4V(r)^8}.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

注意到上式中  $R_{1j}$  均为零, 这是说带有时间项的 Ricci 曲率实际上为 0, 换句话说这里考虑五维几何  $ds_5^2$  和 Taub-NUT 度量  $ds_{TN}^2$  是一样的. 接着, 我们讨论真空中的 Einstein 场方程 (2.37). 为了计算方便, 我们将首先计算定义 2.21 中的 Einstein 张量  $G$ , 为此需要计算数量曲率  $S$ , 根据式 (2.20), 我们利用度量矩阵的逆 (3.4) 和 Ricci 曲率张量进行求和得到

$$\begin{aligned}
 S = g^{ij}R_{ij} &= g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} + g^{44}R_{44} + g^{45}R_{45} + g^{54}R_{54} + g^{55}R_{55} \\
 &= -\frac{R^2 + 16r^3V(r)^3(2V'(r) + rV''(r))}{8r^4V(r)^6}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

由此我们得到 Einstein 张量  $G = \text{Ric} - \frac{1}{2}gS$  以及真空中的 Einstein 场方程  $G = 0$ , 它们是,

$$\begin{aligned}
 G_{11} &= \frac{R^2 + 16r^3V(r)^3(2V'(r) + rV''(r))}{16r^4V(r)^6} = 0 \\
 G_{22} &= \frac{R^2}{16r^4V(r)^4} - \frac{V'(r)^2}{V(r)^2} = 0 \\
 G_{33} &= -\frac{R^2}{16r^2V(r)^4} + \frac{r^2V'(r)^2}{V(r)^2} = 0 \\
 G_{44} &= \frac{1}{4r^4V(r)^8} \left[ \frac{3}{4}R^4 \sin^4(\theta/2) - \frac{1}{4}R^2 r^2 V(r)^4 \sin^2(\theta) \right. \\
 &\quad \left. - 4R^2 r^4 V(r)^2 \sin^4(\theta/2) V'(r)^2 + 4r^6 V(r)^6 \sin^2(\theta) V'(r)^2 \right. \\
 &\quad \left. + 8R^2 r^3 V(r)^3 \sin^4(\theta/2) (2V'(r) + rV''(r)) \right] = 0 \\
 G_{45} = G_{54} &= \frac{1}{16r^4V(r)^8} [R \sin^2(\theta/2) (3R^2 - 16r^4V(r)^2V'(r)^2 \\
 &\quad + 32r^3V(r)^3(2V'(r) + rV''(r)))] = 0 \\
 G_{55} &= \frac{3R^2}{16r^4V(r)^8} - \frac{V'(r)^2}{V(r)^6} + \frac{4V'(r) + 2rV''(r)}{rV(r)^5} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$



观察方程组 (3.16), 首先考虑  $G_{22}$  和  $G_{33}$ , 可以发现这两个式子是等价的, 化简后立刻得到

$$V'(r)^2 = \frac{R^2}{16r^4V(r)^2}. \quad (3.17)$$

积分得到  $V(r)$  的四个解,

$$V(r) = \sqrt{2c + \frac{R}{2r}}, -\sqrt{2c - \frac{R}{2r}}, \sqrt{2c - \frac{R}{2r}}, \text{ 或 } -\sqrt{2c + \frac{R}{2r}}, \quad (3.18)$$

其中  $c$  是任意常数。这与 [1] 中给定的  $V(r) = \sqrt{1 + \frac{R}{2r}}$  的形式相吻合, 这也说明了 [1] 中的 Taub-NUT 度量确实是 Ricci 平坦的。我们对 (3.18) 得到的  $V(r)$  求导后代回到方程组 (3.16), 可以验证所有的 Einstein 张量  $G_{ij}$  均化为零。换句话说, 在这里取  $V(r)$  为 (3.18) 给出的表达式是, Taub-NUT 度量 (1.1) 是真空 Einstein 场方程 (2.37) 的解且为 Ricci 平坦的。从  $ds_{TN}^2$  的表达式 (3.1) 看, 由于  $R$  和  $r$  始终是大于 0, 而  $V$  在度量中总以  $V^2$  形式出现, 所以 Taub-NUT 度量的奇点会依 (3.18) 中  $R$  前面符号不同而有很大差别, 但不会因  $V$  的符号而有所区别。因此, 我们在后文讨论 Taub-NUT 度量奇点的具体性质时, 为了计算方便, 而又不失一般性, 将就下列这两种情形进行讨论。

$$V_1(r) = \sqrt{1 + \frac{R}{2r}}, \quad V_2(r) = \sqrt{1 - \frac{R}{2r}}. \quad (3.19)$$

## 第四章 $ds_5^2$ 度量的性质

正如之前文章所阐述的, 研究高维黑洞的动机主要在于两点, 其中一点是我们想要考察黑洞中与维数无关的性质, 另一点在于弦论对高维空间的要求。研究 Taub-NUT 度量的动机主要在于后者, 有许多文章详细阐述了 Taub-NUT 度量的物理意义以及其更进一步的推广, 比如 [19] 和 [2]。在本章我们将从度量角度出发, 就上文所阐述的两种情况进行讨论, 计算  $ds_5^2$  可能存在的奇点以及其奇点附近的曲率及测地线的行为, 进而给出  $ds_5^2$  奇点的黑洞的一个几何直观上的理解。

### §4.1 $V_1(r)$ 对应度量的性质

我们首先考虑度量  $ds_5^2(1.1)$ , 其中 Taub-NUT 度量中的  $V(r)$  取为 (3.19) 中的  $V_1(r) = \sqrt{1 + \frac{R}{2r}}$ , 在这里  $V_1$  的表达式与 [1] 相同, 正如前文所描述的其有着具体的物理意义。此时度量是,

$$ds_5^2 = -dt^2 + \frac{(R+2r)dr^2}{2r} + \frac{2r dy^2}{R+2r} + \frac{1}{2}r(R+2r)d\theta^2 + \frac{4Rr \sin^2(\theta/2)}{R+2r} dy d\phi + \frac{r(4R^2 \sin^4(\theta/2) + (R^2 + 4Rr + 4r^2) \sin^2(\theta))}{2(R+2r)} d\phi^2. \quad (4.1)$$

其黎曼曲率张量和 Einstein 场方程如上一章 (3.12) 和 (3.16) 所示。由于  $R > 0, r \geq 0$ , 可以看到从度量角度,  $ds_5^2$  的奇点应该在  $r = 0$  处, 但正如 §2.2.3 中讨论的那样, 度量表现出的奇性有可能仅仅是由于坐标系的选取而产生的, 其对应的流形并不一定真正的拥有奇点。一般来说, 我们需要选取一些几何上的与度量无关的不变量, 考察这些量在可能的奇点附近的取值, 或者计算奇点附近的测地线的切向量场的行为, 来判断其是否为真正的奇点。接下来我们将给出具体分析, 首先考虑  $r = 0$  处的数量曲率  $S$ , 其表达式见 (3.15), 将 (3.19) 代入得到,

$$\begin{aligned} S_{TN} &= - \frac{R^2 + 16 \left(1 + \frac{R}{2r}\right)^{3/2} r^3 \left( -\frac{R^2}{4\sqrt{4 + \frac{2R}{r}r^2(R+2r)}} \right)}{8 \left(1 + \frac{R}{2r}\right)^3 r^4} \\ &= - \frac{R^2 - R^2}{8 \left(1 + \frac{R}{2r}\right)^3 r^4} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

换句话说  $r \rightarrow 0$  时尽管分母有  $r^4$ , 分子总为 0, 事实上 (3.15) 在  $r \rightarrow 0$  时极限也为 0, 这表明数量曲率  $S_{TN}$  在  $r = 0$  处没有奇性。实际上, 对于  $ds_5^2$ , 其 Ricci 曲

率张量 (3.14) 在  $r \rightarrow 0$  时也为 0, 但其黎曼曲率张量  $R_{ikl}^j$  或  $R_{ijkl}$  存在许多非零项, 所以我们需要考虑其他由黎曼曲率张量生成的与坐标无关的量。在物理上常用 Kretschmann 不变量  $\mathcal{K}$  来判断, 它是由黎曼曲率张量  $R_{ijkl}$  和经  $g^{ij}$  提升了四个上指标的  $R^{ijkl}$  缩并得到, 其本身基本相当于黎曼曲率张量的平方, 在 §2.2.3 我们看到, 对于 Schwarzschild 度量, 它有  $r^{-6}$  的量级。考察  $ds_5^2$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{TN} &= R_{ijkl}R^{ijkl} \\ &= \frac{1}{4r^8V(r)^{12}} \left[ \frac{11R^4}{16} + 64R^2r^3V(r)^3V'(r) + 58R^2r^4V(r)^2V'(r)^2 \right. \\ &\quad + 4V(r)^4(3R^2r^2 + 56r^8V'(r)^4) - 32r^7V(r)^5V'(r)^2(-2V'(r) + 5rV''(r)) \\ &\quad \left. + 16r^6V(r)^6(8V'(r)^2 + 4rV'(r)V''(r) + 3r^2V''(r)^2) \right] \\ &= \frac{384R^2}{(R+2r)^6}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

因此,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{K}_{TN} = \frac{384}{R^4}. \quad (4.4)$$

这说明黎曼曲率张量在零点附近将取决于常数  $R$ 。当  $R = 0$  的时候, 在  $r = 0$  处  $ds_5^2$  将拥有无穷大的黎曼曲率。倘若讨论  $R > 0$  的情况, 我们几乎可以断言  $r = 0$  处没有奇点, 至少从曲率上说是如此, 然而我们仍然需要分析其附近测地线的情况来判断  $r = 0$  处究竟是否为奇点。

尽管我们现在只有度量  $ds_5^2$  的信息, 而不知道流形的整体情况。黎曼几何基本定理 2.5 保证了存在唯一的无挠容许联络, 由此可以得到平行移动, 这使得我们能够讨论测地线, 至少在局部讨论测地线是有意义的。

首先选取局部坐标系  $\{t, r, \theta, \phi, y\}$ , 以及适当的参数  $\tau$ , 记速度向量  $\{\dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{y}\} = \left\{ \frac{dt}{d\tau}, \frac{dr}{d\tau}, \frac{d\theta}{d\tau}, \frac{d\phi}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau} \right\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ , 对于 Taub-NUT 度量, 如果取 Lagrange 量

$$2\mathcal{L} = g_{ij} \frac{du^i}{d\tau} \frac{du^j}{d\tau}, \quad (4.5)$$

那么有,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left[ \dot{t}^2 - \frac{R+2r}{2r} \dot{r}^2 - \frac{2r}{R+2r} \dot{y}^2 - \frac{1}{2} r(R+2r) \dot{\theta}^2 - \frac{4Rr \sin^2(\theta/2)}{R+2r} \dot{y} \dot{\phi} \right. \\ &\quad \left. - \frac{r(4R^2 \sin^4(\theta/2) + (R^2 + 4Rr + 4r^2) \sin^2(\theta))}{2(R+2r)} \dot{\phi}^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

由此可以得到 Lagrange 量对各速度向量的偏导数如下,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} &= \dot{t} \triangleq p_t, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} &= -\left(\frac{R+2r}{2r}\right) \dot{r} \triangleq -p_r \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= -\frac{1}{2}r(R+2r)\dot{\theta} \triangleq -p_\theta \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} &= -\frac{2r}{R+2r}\dot{y} - \frac{2Rr \sin^2(\theta/2)}{R+2r}\dot{\phi} \triangleq -p_y \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= -\frac{2Rr \sin^2(\theta/2)}{R+2r}\dot{y} - \frac{r(4R^2 \sin^4(\theta/2) + (R^2 + 4Rr + 4r^2) \sin^2(\theta))}{2(R+2r)}\dot{\phi} \\
 &\triangleq -p_\phi.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

此时可以求得 Hamilton 量

$$\mathcal{H} = p_t \dot{t} - (p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_y \dot{y} + p_\phi \dot{\phi}) - \mathcal{L} = \mathcal{L}, \tag{4.8}$$

是等于 Lagrange 量的, 从物理上这说明体系没有势能, 能量完全来自动能, 因此可以将 Lagrange 量取为常数 [18]。事实上, 从几何角度来看, 这是说总能选取适当的参数  $\tau$  使得  $\mathcal{L} = c$  为常数。

我们考虑零测地线即光线的轨迹。这是说对于测地线的切向量  $v$ , 有  $g(v, v) = 0$ , 那么根据式 (4.5), 我们总有  $\mathcal{L} = 0$ 。考虑这个系统的 Euler-Lagrange 方程 (2.32)。首先注意到

$$\frac{dp_\theta}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{2}r(R+2r)\dot{\theta} \right) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}, \tag{4.9}$$

又注意到  $\mathcal{L}$ (4.6) 关于  $\theta$  求偏导后, 每一非零项均含有  $\cos(\theta/2)$  或  $\sin \theta$ 。所以, 如果取  $\theta = \pi$  代入 (4.9), 当  $\dot{\theta}$  为 0 的时候,  $\ddot{\theta}$  也为 0。换句话说, 在  $\theta = \pi$  平面内的测地线将不会进入其他  $\theta$  平面。为了减少变量的个数, 接下来我们将考虑  $\theta = \pi$  平面上测地线的行为。此时的 Lagrange 量  $\mathcal{L}$  为,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \dot{t}^2 - \frac{R+2r}{2r} \dot{r}^2 - \frac{2r}{R+2r} \dot{y}^2 - \frac{4Rr}{R+2r} \dot{y} \dot{\phi} - \frac{2R^2 r}{R+2r} \dot{\phi}^2 \right). \tag{4.10}$$

对于  $t$ , 有

$$\frac{dp_t}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0, \text{ i.e. } \frac{dt}{d\tau} = E, \tag{4.11}$$

其中  $E$  为正常数, 考虑到时间的物理意义。对于  $y$  和  $\phi$ , 事实上, 注意到将  $\theta = \pi$  代入 (4.7) 得到,

$$\frac{dp_y}{d\tau} = \frac{dp_\phi}{d\tau} = 0, \quad p_\phi = Rp_y \triangleq RA, \tag{4.12}$$

其中  $A$  为常数。上式 (4.12) 还可以解出  $\dot{y}$  和  $\dot{\phi}$  的关系,

$$\dot{\phi} = \frac{A(R+2r)}{2Rr} - \frac{1}{R}\dot{y}. \tag{4.13}$$

接下来我们考虑  $A = 0$  和  $A \neq 0$  两种情况。首先若  $A = 0$ , 考虑式 (4.11) 和式 (4.13), Lagrange 量  $\mathcal{L}$  可进一步化为

$$2\mathcal{L} = E^2 - \frac{R + 2r}{2r} \dot{r}^2. \quad (4.14)$$

因此由  $\mathcal{L} = 0$ , 可以得到

$$\begin{cases} \dot{\phi} = -\frac{1}{R}\dot{y} \\ \dot{t} = E \\ \dot{r}^2 = \frac{2rE^2}{R + 2r} \end{cases} \quad (4.15)$$

我们主要关心奇点附近的零测地线的径向离奇点距离  $r$  与时间  $t$  之间的关系, 所以不考虑第一个方程。从 (4.15) 可以解得  $r$  与  $t$  的关系。考虑到光线在起始时刻向着奇点的位置出发, 我们取  $\dot{r} < 0$ , 由此可以得到关于  $r, t$  的变量分离的常微分方程, 可以解得,

$$\begin{cases} t = E\tau + c_1 \\ \tau = \frac{-\sqrt{2r(2r + R)} - R \ln(2\sqrt{r} + \sqrt{4r + 2R})}{2E} + c_2 \end{cases} \quad (4.16)$$

其中  $c_1, c_2$  是任意常数。简单分析可以得到,

$$\lim_{r \rightarrow 0} t = c_1 + c_2 E - \frac{1}{4} R \ln(2R). \quad (4.17)$$

这是说在有限的时间内,  $\theta = \pi$  平面上的所有零测地线都会运动到  $r = 0$  处, 换句话说可以认为  $r = 0$  是一个奇点。与 Schwarzschild 情况所不同的是, 在这里由于时间是有限的, 我们确实可以目睹光线撞到奇点, 而且至少在  $\theta = \pi$  平面上, 奇点并没有被事件视界包围, 是一颗裸奇点。

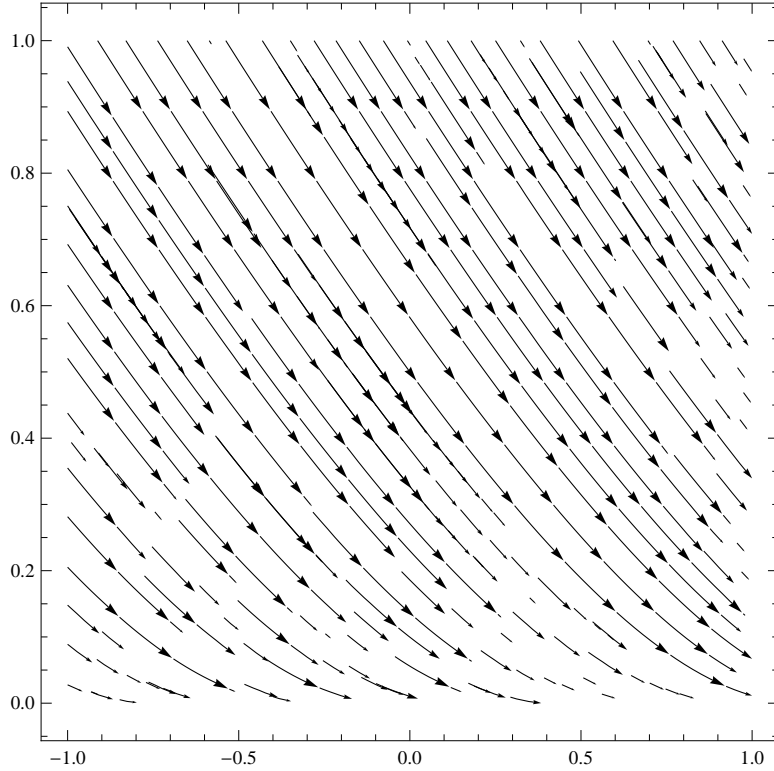
图 4.1 是  $V = V_1$  时, 取定了  $E = 2, R = 1$  后得到的  $r - t$  的数值模拟, 从图上我们可以清晰地看到  $r - t$  曲线在有限的  $t$  范围内到达  $r = 0$ 。

以上是关于  $A = 0$  的情况讨论, 接下来我们考虑  $A \neq 0$ 。若  $A \neq 0$ , 将 (4.13) 代入到 Lagrange 量  $\mathcal{L}$ (4.10) 得到,

$$2\mathcal{L} = E^2 - \frac{R + 2r}{2r} \dot{r}^2 - \frac{A^2(R + 2r)}{2r}. \quad (4.18)$$

有趣的地方是, 在计算后的  $\mathcal{L}$  表达式 (4.18) 里, 关于  $y$  和  $\phi$  的项恰好互相抵消了, 在这里  $A$  实际上代表着某种角动量, 这说明  $\phi$  和  $y$  有着某种对称关系。类似的仍然可以得到三个方程, 若忽略其中  $y$  和  $\phi$  的关系式, 只考虑  $r$  与  $t$  得到,

$$\begin{cases} \dot{t} = E \\ \dot{r}^2 = \frac{2rE^2}{R + 2r} - A^2 \end{cases} \quad (4.19)$$


 图 4.1  $r-t$  曲线数值模拟,  $V = V_1, A = 0, E = 2, R = 1$ 

首先注意到, 若令  $\dot{r} = 0$ , 可以得到

$$r = \frac{A^2 R}{2(E^2 - A^2)} \triangleq r_0, \quad (4.20)$$

为了使解有意义, 不妨要求  $E > A$ . 注意到当  $r < r_0$  时,  $\dot{r}$  在实数域上将没有定义, 这使得在  $r_0$  内的时空区域内的测地线无法由方程所描述. 如果我们先考虑  $r \geq r_0$  的区域, 若记  $E^2 - A^2 = C$ , 对 (4.19) 变量分离后得到,

$$\begin{cases} t = E\tau + c_1 \\ \tau = \frac{1}{4C^{3/2}} [2\sqrt{C(2r+R)(2Cr+A^2R)} \\ + E^2 R \ln(4Cr + (A^2 + C)R + 2\sqrt{C(2r+R)(2Cr+A^2R)})] + c_2 \end{cases} \quad (4.21)$$

并且,

$$\lim_{r \rightarrow r_0} t = c_1 + c_2 E + \frac{E^3 R \ln(E^2 R)}{4C^{3/2}}. \quad (4.22)$$

这也表明在有限的时间, 零测地线的轨迹将到达  $r_0$  并不再延伸. 在这情况下,  $r_0$  并不是事件视界的半径, 在  $r_0$  内部, 零测底线在实数域内失去定义, 其结构是十分有趣的.

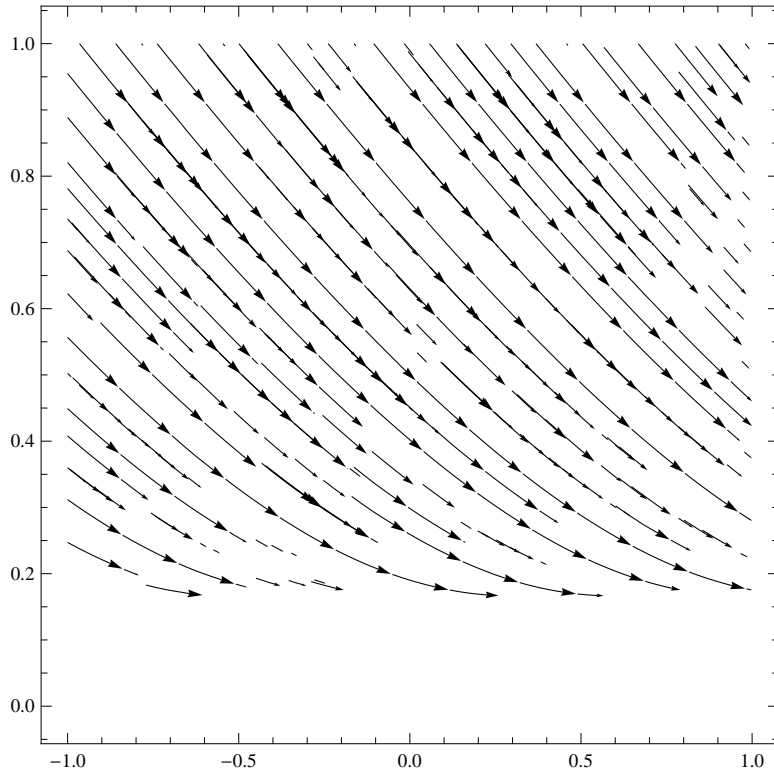

 图 4.2  $r-t$  曲线数值模拟,  $V = V_1, A = 1, E = 2, R = 1$ 

图 4.2 给出了  $V = V_1$  时,  $A = 1, E = 2, R = 1$  时的  $r-t$  曲线数值模拟。可以看到随着  $t$  的增大,  $r$  最终停留于有限值。由于我们并没有考虑  $\phi$  和  $y$  的方程, 如果它们有非平凡的解, 这说明光线可能在运动到半径  $r_0$  处后无法向内运动, 但是仍可以在  $r = r_0$  的球面上运动。

#### §4.2 $V_2(r)$ 对应度量的性质

在 (3.18) 我们解得符合 Einstein 场方程的  $V(r)$  实际上有四种, 但正如前文所阐述的实际上只要考虑两类情况, 又由于常数  $c$  的取值本质上不会改变奇点的性质, 所以我们只讨论 (3.19) 两种。本节我们将讨论  $V_2(r) = \sqrt{1 - \frac{R}{2r}}$  的情形, 此时度量为

$$\begin{aligned}
 ds_5^2 = & -dt^2 - \frac{(R-2r)dr^2}{2r} - \frac{2r dy^2}{R-2r} - \frac{1}{2}r(R-2r)d\theta^2 - \frac{4Rr \sin^2(\theta/2)}{R-2r} dyd\phi \\
 & - \frac{r(4R^2 \sin^4(\theta/2) + (R^2 - 4Rr + 4r^2) \sin^2(\theta))}{2(R-2r)} d\phi^2.
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

从度量上看, 可能的奇点为  $r = 0$  和  $r = \frac{R}{2}$ , 类似的计算可以得到其数量曲率  $S$  和 Ricci 曲率张量在上述情况的极限均为 0. 考虑其 Kretschmann 不变量  $\mathcal{K}$ , 此时

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{TN} &= R_{ijkl}R^{ijkl} \\ &= \frac{384R^2}{(R-2r)^6}.\end{aligned}\quad (4.24)$$

这与  $V_1(r)$  的情况有所不同. 在  $r = 0$  处,  $\mathcal{K}$  仍然有很好的定义为  $\frac{384}{R^4}$ , 但是在  $r = \frac{R}{2}$  处,  $\mathcal{K}$  是发散的, 这说明其黎曼曲率是无穷大, 因此在整个球面  $r = \frac{R}{2}$  上均具有奇性.

我们仍然需要分析其零测地线的性质, 以得到关于  $r = 0$  和  $r = \frac{R}{2}$  的更多的性质. 用与上一节相同的坐标系和记号, 则此时的 Lagrange 量  $\mathcal{L}$  为,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left[\dot{t}^2 - \frac{-R+2r}{2r}\dot{r}^2 - \frac{2r}{-R+2r}\dot{y}^2 - \frac{1}{2}r(-R+2r)\dot{\theta}^2 - \frac{4Rr\sin^2(\theta/2)}{-R+2r}\dot{y}\dot{\phi}\right. \\ &\quad \left. - \frac{r(4R^2\sin^4(\theta/2) + (R^2 - 4Rr + 4r^2)\sin^2(\theta))}{2(-R+2r)}\dot{\phi}^2\right].\end{aligned}\quad (4.25)$$

并且有 Lagrange 量对各速度向量的偏导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} &= \dot{t} \triangleq p_t, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} &= -\left(\frac{-R+2r}{2r}\right)\dot{r} \triangleq -p_r \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= -\frac{1}{2}r(-R+2r)\dot{\theta} \triangleq -p_\theta \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} &= -\frac{2r}{-R+2r}\dot{y} - \frac{2Rr\sin^2(\theta/2)}{-R+2r}\dot{\phi} \triangleq -p_y \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= -\frac{2Rr\sin^2(\theta/2)}{-R+2r}\dot{y} - \frac{r(4R^2\sin^4(\theta/2) + (R^2 - 4Rr + 4r^2)\sin^2(\theta))}{2(-R+2r)}\dot{\phi} \\ &\triangleq -p_\phi.\end{aligned}\quad (4.26)$$

计算得此时 Hamilton 量  $\mathcal{H} = \mathcal{L}$  仍然成立, 即可以取适当参数使得  $\mathcal{L}$  为常数. 在这里我们考虑的是  $\mathcal{L} = 0$  所对应的零测地线. 考虑系统的 Euler-Lagrange 方程 (2.32). 与先前类似的, 在  $\theta = \pi$  平面上, 若  $\dot{\theta} = 0$  仍有  $\ddot{\theta} = 0$ , 因此这仍是不变平面, 我们接下来均考虑在这个平面上零测地线的行为. Lagrange 量 (4.25) 可以化为,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{t}^2 - \frac{-R+2r}{2r}\dot{r}^2 - \frac{2r}{-R+2r}\dot{y}^2 - \frac{4Rr}{-R+2r}\dot{y}\dot{\phi} - \frac{2R^2r}{-R+2r}\dot{\phi}^2\right).\quad (4.27)$$

计算可得式 (4.11) 及 (4.12) 仍成立, 我们将沿用上一节的记号. 那么有

$$\dot{\phi} = \frac{A(2r-R)}{2Rr} - \frac{1}{R}\dot{y}.\quad (4.28)$$



若  $A = 0$ , 将 (4.28) 代入 (4.27), 并综合 (4.11) 得到

$$\begin{cases} \dot{\phi} = -\frac{1}{R}\dot{y} \\ \dot{t} = E \\ \dot{r}^2 = \frac{2rE^2}{2r - R} \end{cases} \quad (4.29)$$

可以解得  $t$  与  $r$  之间有,

$$\begin{cases} t = E\tau + c_1 \\ \tau = \frac{\sqrt{2r(2r - R)} - R \ln(2\sqrt{r} + \sqrt{4r - 2R})}{2E} + c_2, r > \frac{R}{2} \end{cases} \quad (4.30)$$

并且有

$$\lim_{r \rightarrow \frac{R}{2}} t = c_1 + c_2 E - \frac{1}{4} R \ln(2R). \quad (4.31)$$

有趣的是这与 (4.17) 相同, 换句话说, 在这种情况下, 光线到达半径  $r = \frac{R}{2}$  处所需的时间与  $V_1(r)$  下光线到达  $r = 0$  所需的时间相同。

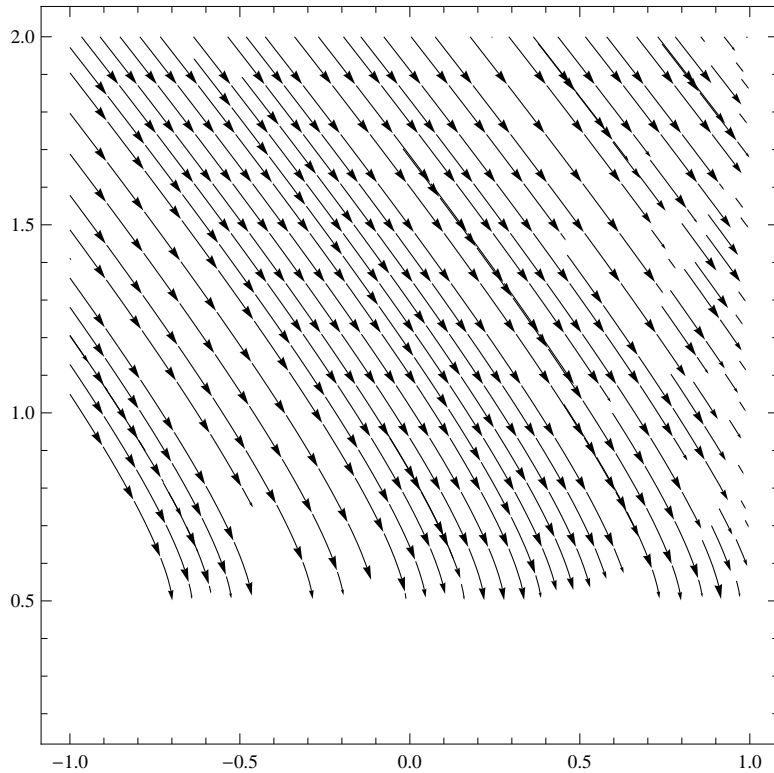


图 4.3  $r - t$  曲线数值模拟,  $V = V_2, A = 0, E = 2, R = 1$

图 4.3 给出了  $V = V_2$  时  $A = 0, E = 2, R = 1$  的  $r - t$  曲线的数值模拟, 可以看到所有曲线都在  $r = \frac{R}{2}$  处终结。

对于  $A \neq 0$ , 再次将 (4.28) 代入 (4.27) 得到,

$$\begin{cases} \dot{t} = E \\ \dot{r}^2 = \frac{2rE^2}{2r - R} - A^2 \end{cases} \quad (4.32)$$

若记  $D = E^2 - A^2$ , 对上式积分后解得

$$\begin{cases} t = E\tau + c_1 \\ \tau = \frac{1}{4D^{3/2}} [2\sqrt{D(2r - R)(2Dr + A^2R)} \\ - E^2R \ln(4Dr + (D - A^2)R + 2\sqrt{D(2r - R)(2Dr + A^2R)})] + c_2, r > \frac{R}{2} \end{cases} \quad (4.33)$$

并且有

$$\lim_{r \rightarrow \frac{R}{2}} t = c_1 + c_2E - \frac{E^3R \ln(E^2R)}{4D^{3/2}}, \quad (4.34)$$

是有限的。

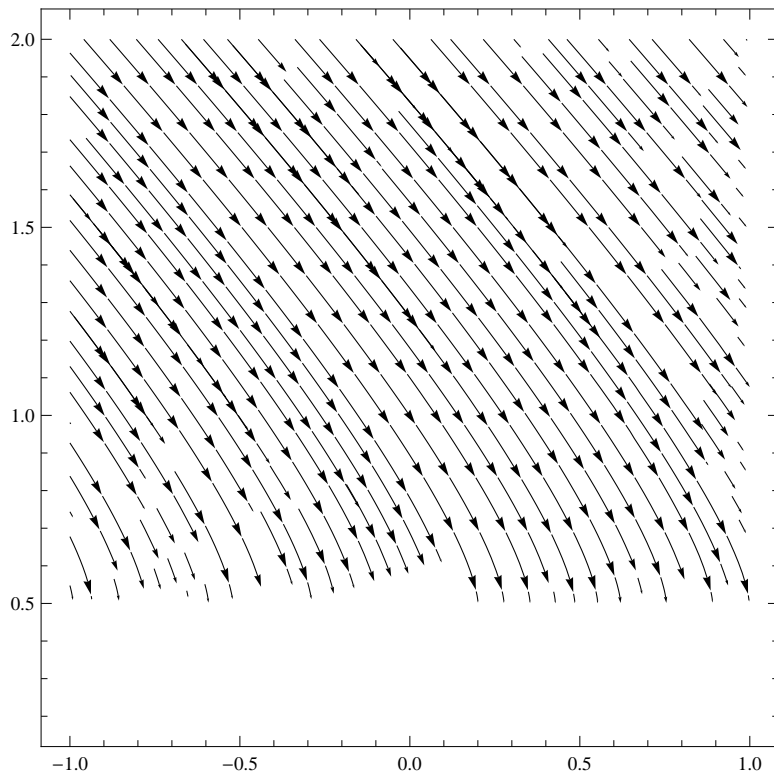


图 4.4  $r - t$  曲线数值模拟,  $V = V_2, A = 1, E = 2, R = 1$

图 4.4 给出了  $V_2$  时  $A = 1, E = 2, R = 1$  的  $r - t$  曲线的数值模拟, 我们可以看到这与  $A = 0$  的情况十分类似, 所有曲线仍然在  $r = \frac{R}{2}$  处终止。

### §4.3 结论与展望

我们比较和总结  $V_1$  与  $V_2$  对应度量的性质, 对于  $V_1$  对应的度量, 在点  $r = 0$  处的黎曼曲率张量和 Ricci 张量均存在且有限; 由于  $V_2$  对应度量本身有一个奇点  $r = R/2$ , 与 Schwarzschild 度量不同的是, 其在整个  $r = R/2$  球面上的黎曼曲率有奇性, 而在  $r = 0$  处没有, 对于  $V_1$ , 相应的奇性应当出现在  $-R/2$ , 但是由于半径  $r \geq 0$ , 所以是取不到的。

对于零测地线, 两者均拥有  $\theta = \pi$  的不动平面, 我们的讨论均限制在该平面内。计算过程中发现, 在  $\dot{y}$  与  $\dot{\phi}$  的关系式中, 两者均出现了常数  $A$ , 但有所不同的是,  $V_1$  对应度量的零测地线终点与  $A$  相关, 且在  $A = 0$  时并没有事件视界包裹奇点;  $V_2$  对应的则与  $A$  无关, 始终是  $R/2$ 。在零测地线终止处, 两者拥有不同的黎曼曲率张量, 对于  $V_1$ , 其 Kretschmann 不变量是有限的, 对于  $V_2$  则是无穷大; 两者的径向距离  $r$  变化率  $\dot{r}$  的值也有很大差别, 对于  $V_1$  有  $\dot{r} = 0$ , 而对于  $V_2$  仍然是无穷大。相同的是无论在  $A = 0$  还是  $A \neq 0$  的情况下,  $V_1, V_2$  两者度量的零测地线到达终点时时间参数  $t$  的取值均为有限值。

根据 [1], Taub-NUT 度量可以被推广到多个中心的情况, 它描述了一个具有  $N$  个 D6- 膜的系统, 推广后的度量为

$$ds^2 = V(\vec{x})^2 d\vec{x} \cdot d\vec{x} + \frac{1}{V(\vec{x})} (dy + \vec{A} \cdot d\vec{x})^2, \quad (4.35)$$

式中  $\vec{A}$  是常向量。一个自然的问题是, 其 Ricci 曲率张量与单个中心的度量有什么关系, 包括函数  $V(\vec{x})$  的所有可能的表达式是什么。另一个问题是, 对于多中心的情况零测地线的轨迹将是怎么样的。这些都是值得我们今后进行研究和讨论的内容。

## 参考文献

- [1] K.Becker, M.Becker and J.H.Schwarz, String Theory and M-Theory A Modern Introduction[M], Cambridge University Press, 2007.
- [2] Cristian I. Stelea, Higher dimensional Taub-NUT spaces and applications[D], University of Waterloo, 2006.
- [3] W.Nahm, Supersymmetries And Their Representations[J], Nucl. Phys. B, 135:149-166, 1978.
- [4] R.Penrose, The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe[M], Vintage Books, 2005.
- [5] N.A.Ober, Black Holes in Higher-Dimensional Gravity[J], Lect. Notes Phys. 769,211-258(2009).
- [6] B.Kol, The Phase Between Caged Black Holes and Black Strings: A Review[J]. Phys. Rept. 422, 119-165(2006).
- [7] A.Strominger, C. Vafa, Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy[J]. Phys. Lett. B379,99-104(1996).
- [8] T.Harmark, Stationary and axisymmetric solutions of higher-dimensional general relativity[J]. Phys. Rev. D70, 124002(2004).
- [9] B.Kol, E.Sorkin, On black-brane instability in an arbitrary dimension[J]. Class. Quant. Grav. 21,4793-4804(2004).
- [10] S.S.Gubser, On non-uniform black branes[J], Class. Quant. Grav. 19,4825-4844(2002).
- [11] W.D.Goldberger, I.Z.Rothstein, An effective field theory of gravity for extended objects[J]. Phys. Rev. D73, 104029(2006).
- [12] S.Giusto, A.Saxena, Stationary axisymmetric solutions of five dimensional gravity[J]. Class. Quant. Grav. 24, 4269-4294(2007).
- [13] Marcel Berger, A Panoramic View of Riemannian Geometry[M], Springer, 2000.
- [14] John M.Lee, Introduction to Smooth Manifolds[M], Springer, 2006.
- [15] 陈省身, 陈维桓, 微分几何讲义 [M], 北京大学出版社, 2001.10.
- [16] 陈维桓, 李兴校, 黎曼几何引论 (上册) [M], 北京大学出版社, 2002.12.
- [17] Peter Peterson, Riemannian Geometry[M], Springer, 2006.
- [18] S.Chandrasekhar, The Mathematical Theory of Black Holes[M], Oxford University Press, 1983.

- [19] F. Finster, N. Kamran, J. Smoller and S.T. Yau, Linear Waves in the Kerr Geometry: A Mathematical Voyage To Black Hole Physics[J], arXiv:0801.1423v4 [math-ph], 2009.
- [20] R.K.Sachs, H.Wu, General Relativity for Mathematicians[M], Springer, 1977.
- [21] S.W.Hawking, Black Holes in General Relativity[J], Commun. Math. Phys. 25,152-166(1972).
- [22] S.Krasnikov, Falling into the Schwarzschild Black Hole. Important Details, Gravitation and Cosmology[J], Vol.14, No.4, pp.362-367(2008).
- [23] S.S.Seahra, P.S.Wesson, Universes Encircling Five-dimensional Black Holes[J], J. Math. Phys.44, 5664(2003).
- [24] R.P.Kerr, Physical Review Letters[J], 11, 237, 1963.
- [25] S.Hollands, J.Holland and A.Ishibashi, Further Restrictions on the Topology of Stationary Black Holes in Five Dimensions[J], Ann.Henri Poincaré 12,279-301(2011).

## 致谢

经过几个月的努力，在陈春丽老师的悉心指导下，我完成了本次本科生毕业论文。本次论文从选题到中期检查再到最后的写作均离不开陈春丽老师的细心指导；感谢陈老师在选题，开题和中期报告对于我的引导和建议；感谢她在每次讨论班听取我的学习成果，对后期的研究方向进行引导；感谢她在论文写作后期逐字逐句地检查文章中出现的错误。在此，允许我对陈春丽老师表达崇高的敬意及衷心的感谢。

此外，我还要感谢在大学四年期间教育过我的老师，他们对我的教育不仅仅是在知识上的传授，他们的谦虚，严谨都潜移默化的影响着我的成长。在大学毕业之际，我谨向一路上给予我教育，关怀的各位老师以深深的敬意。

本论文的完成也离不开同学的关心、帮助及鼓励，我对所有帮助鼓励过我的同学表达由衷的感谢。

最后，我还要感谢我的父母和家人，我的大学四年离不开他们的教育和支持，我相信将来的道路上我也会越走越好，不辜负他们的期待。

# A Study on Einstein Field Equation of Taub-NUT Metric and its Properties

General relativity and quantum field theory are two most successful theory among the major achievements of twentieth century research in theoretical physics. However, they are not compatible with each other. String theory is a successful attempt to combine relativity theory and quantum mechanics. Taub-NUT metric is the four dimensional part of the five dimensional Ricci-flat metric, which is related to Kaluza-Klein monopole. This article mainly gives a mathematical description of Taub-NUT metric via general relativity methods. However, Taub-NUT metric is deeply related to physics. Therefore, we shall at first introduce the physical background of it.

The basic idea of string theory is that all matters are made of tiny strings. That is to say, we regard matters, instead of as particles, as strings of different vibrations. Similar to the world-line in general relativity, we call the two dimensional surface swept by a string in the space-time a world-sheet. The parameter describing the string usually is at the scale  $10^{-35}$ , which is extremely small that at low energies, particles look like points which can be described by quantum mechanics. String theory is a candidate for the unification of the four fundamental forces. Unification means that all particles and forces can be described by vibrational modes of one single kind of string.

Another important feature of string theory is that it can provide us a finite quantum gravity theory. The quantum stability of string theory shall require the space-time dimension lower than a critical dimension, which is determined by the number  $N$  of allowed supersymmetries on the string world-sheet. Considering the special properties of string world-sheet, one can only have theories with  $N = 0, 1, 2, 4$  local supersymmetries. For  $N = 0$ , which is also called bosonic string, the critical dimension is 26. However, the bosonic string suffers from many problems. One of which is it does not contain fermions. In the case of  $N = 2$ , the critical dimension is 4, however the signature of the space-time is wrong. And for  $N = 4$ , the critical dimension is below zero.

In conclusion we should only consider theories with  $N = 1$ , whose critical dimension is 10. In this case, we can obtain five different kinds of consistent superstring theories. Supersymmetry can place an upper limit on the dimensionality of space-time. If one requires gravities to be unique in four dimensions, the number of supersymmetries cannot exceed eight, which implies the dimension of space-time is at most eleven. Actually, we can obtain a unique supergravity theory in eleven-dimensional space-time. In fact, the Kaluza-Klein reduction of eleven-dimensional supergravity on a circle is Type IIA supergravity theory, which is the low-energy effective action of Type IIA superstring theory. The latter is one of the five theories we mentioned above. E.Witten realized

the importance of the duality relationship between these theories. He argued that there exists one unique theory, M-theory, which shall unifies all the superstring theories in ten dimensions. The discovery of the various duality between the string theories are later called 'Second Superstring Revolution'.

M-theory regards strings as a kind of more generalized objects, which are called branes. In string theory, D-brane is a kind of object on which allows a string fixes its end points with some specific conditions. It is a steady state solution of the eleven-dimensional supergravity theory. D6-brane is the magnetic dual of the D0-brane and the D0-brane is interpreted as a Kaluza-Klein excitation along a circle. The five-dimensional metric that describes the Kaluza-Klein monopole is  $ds_5^2 = -dt + ds_{TN}^2$ , in which  $ds_{TN}^2$  is the Taub-NUT metric. This article mainly studies  $ds_5^2$  as well as the Taub-NUT metric, since these two metrics does not have many differences.

From a geometric view Taub-NUT geometry can be visualized as analogous to a cigar with the D6-brane localized to the region near the tip. Far from the tip, the geometry looks like  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$ . When considering the strong-coupling limit of the geometry, one may discover that there is a five dimensional black hole at the origin. As we described above, the dimension of the space-time required by string theory is ten. Therefore, many high-dimensional black holes may appear from several different kinds of metrics in string theory, of which contains Taub-NUT metric.

We shall describe the basic motivation of studying high-dimensional black holes. We have two main reasons; one of which is that we would like to discover which properties of black holes are universal and which ones are dependent of dimension. For example, uniqueness and horizon topology of a black hole are of latter type. In fact, there exists some critical dimensions above which the phase structure of black holes can change dramatically. Beside the purpose of general relativity, string theory is also a main motivation for us to study high-dimensional black holes. The low energy limit of string theory or M-theory can be described by higher-dimensional gravity theories. Therefore, the black objects in gravity theory is closely related to the black rings or black branes solution of the string theory equations, which also acts an important role in the microscopic understanding of the black hole entropy and other properties.

In the past ten years, two classes were studied most intensely. They are stationary solutions with an event horizon in asymptotically flat space, and static solutions with an event horizon in asymptotically flat spaces with compact directions. The former type are also called rotating black holes while the latter type are called Kaluza-Klein (KK) black holes. The main results come out of rotating black holes in dimension five. It has been discovered that, besides Myers-Perry black hole, there exists other rotating black hole solution. These solutions are usually generated by special ansätze based on



symmetries and inverse scattering techniques. And for KK black holes, main progress has been for KK space, namely Minkowski space times a circle. Many phase structures studied recent years were obtained by perturbative techniques, numerical methods and other methods, of which many properties can be generalized to higher dimensions.

There are several ways obtaining black hole solutions. One of them is use symmetries and other physical inputs to simplify the metric that enables one to solve the vacuum Einstein equations. This is the method with which this article dealing the Taub-NUT metric. We starts from the metric; by calculating the vacuum Einstein equations, we obtain some special solution and their related metrics. Other methods used to obtain black hole solutions are numerical techniques, classical effective field theory and solution-generating techniques, such as the inverse scattering methods and perturbative methods.

This article mainly starts from the Taub-NUT metric; we calculates the Riemannian curvature tensor with moving frame and exterior derivative, and further calculations show the Ricci curvature tensor and vacuum Einstein field equations. The article discusses the properties of possible singularities, and does some numerical simulations of null geodesic solutions around the singularities.

In the first part of this article, we introduce some basic notions and methods of Riemannian geometry, including the definition of curvature tensor, curvature forms and using Euler-Lagrange formula to calculate the null geodesic, and basic ideas of general relativity, such as Einstein field equations and black hole solutions. In the second part, we calculate the Riemannian curvature tensor and Ricci tensor by calculating the connection one-forms and curvature forms. By solving the vacuum Einstein field equation, one may obtain two different kinds of metric, one of which is the known Taub-NUT metric. In the last part of this article, we discuss and compare the properties between the two kinds of metric by solving the null geodesic equations and numerical simulation of r-t relationship in the neighbour of the possible singularity.